PB165 Grafy a sítě: Barvení grafu, transport a sítě

Obsah přednášky

1. **Barvení grafu**
   - Popis problému a jednoduché řešení
   - Přiřazení místností
   - Rezervační problém
   - Rozvrhování operátorů
2. **Transport**
   - Doba na nastavení
   - Doba na dopravu
3. **Plánování na počítačové síti**
   - Úvod
   - Paralelní úlohy s komunikací

Barvení grafu

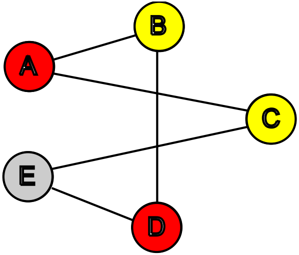
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím *n* barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev *n* nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přiřazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
  - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
  - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
  - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
  - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
  1. uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
  2. použij barvu 1 pro první uzel
  3. vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
     v případě volby z nich vyber uzel
     s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
  4. obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
  5. jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
     jinak běž na krok 3

Přiřazení místností

- **Problém přiřazení místností**
  - úloha = předmět s několika schůzkami týdně
  - zdroj = místnost
  - dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
  - všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

  rozvrh: přiřazení místnosti každému předmětu

  možné řešení:
  - nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
  - nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností
- **Přiřazení místností jako barvení grafu**
  - vrchol: předmět
  - hrana: mezi předměty, které vyžadují stejný čas výuky
  - barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti (zdroji)
    - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

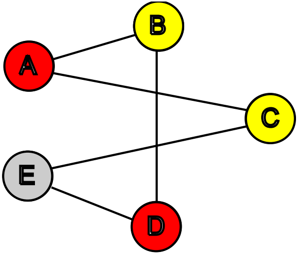
Přiřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2

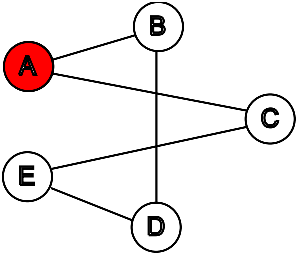
Řešení:

místnost	červená	žlutá	žlutá	červená	šedá

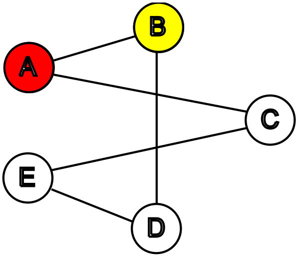


čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

Přiřazení místností: příklad (pokračování)

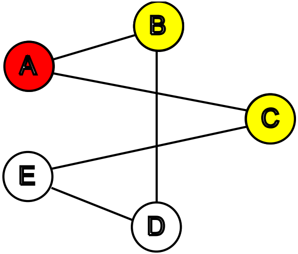


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

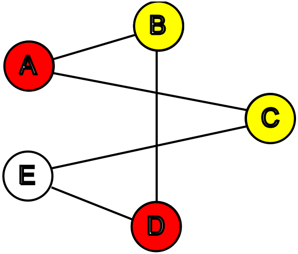


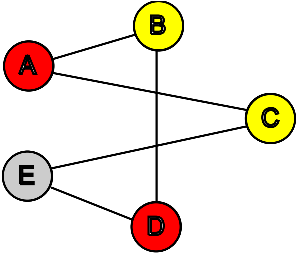
předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

Přiřazení místností: příklad (dokončení)



předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1





Rezervační problém

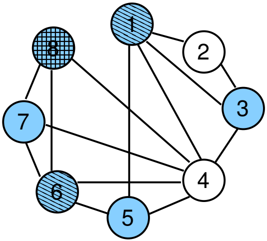
- Příklady
  - rezervace aut
  - rezervace pokojů v hotelu
  - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
  - $p_j = r_j - d_j$
  - p_j doba trvání úlohy
  - r_j termín dostupnosti
  - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů?
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací?

Rezervační problém jako barvení grafu

- Vrchol: rezervace
- Hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací = chromatické číslo
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů = existuje barvení s daným počtem barev
- Příklad:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

  Odpovídající problém barvení grafu:



Rozvrhování operátorů

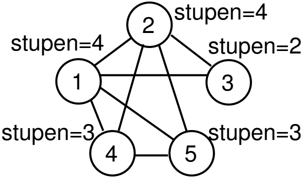
- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
  - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
  - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- **Rozvrhování operátorů jako barvení grafu**
  - vrchol: úloha
  - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
  - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
    - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora
    - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu = existuje barvení s daným počtem barev
    - makespan = chromatické číslo grafu

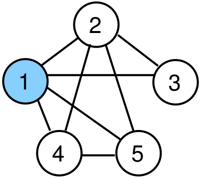
Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

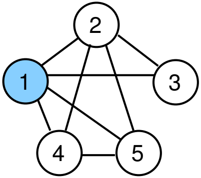




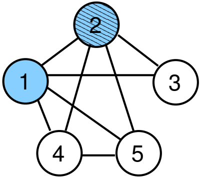
Můžeme vybrat buď úlohu 1 nebo úlohu 2

Např. vybereme 1 a obarvíme barvou 1

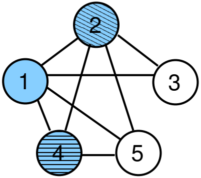
Příklad: plánování schůzek (dokončení)



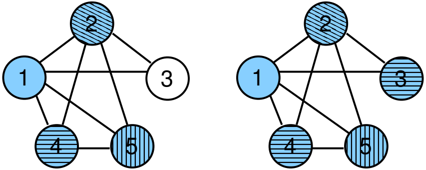
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Shrnutí

Přiřazení místností

- vrchol: předmět **úloha**
- hrana: mezi předměty vyžadujími stejný čas **průnik časových bodů**
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti **zdroj**
  - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

Rezervační problém

- vrchol: rezervace **úloha**
- hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase **průnik intervalů**
- barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji **zdroj**
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase

Rozvrhování operátorů

- vrchol: úloha **úloha**
- hrana: mezi úlohami vyžadujícími stejného operátora **průnik zdrojů**
- barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy **časový bod**
  - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora

Cvičení

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

1. Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

   Nápověda: problém přiřazení místností

2. Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

   Nápověda: rezervační problém

Cvičení (pokračování)

3. Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů

Obsah

Problém obchodního cestujícího

Problém obchodního cestujícího

- obchodní cestující musí projet všechna města tak, aby
  - celková ujetá vzdálenost (resp. doba cesty) byla minimální a
  - každé město projel právě jednou

Grafová reprezentace

- **(orientovaný) hranově ohodnocený graf**
- vrchol = město
- (orientovaná) hrana z A do B = přímá cesta z A do B
  - hrany mohou být orientované, pokud chceme uvažovat různou náročnost v opačných směrech cesty
- ohodnocení hrany z A do B = doba nutná na cestu z A do B

Nastavovací doba a cena *(setup time and cost)*

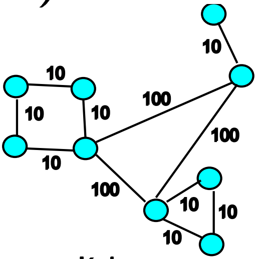
- **Nastavovací doba** s_{ijk}, s_{jk}**: závislá na úlohách**
  - udává závislost na posloupnosti provádění úloh
  - s_{ijk} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
  - s_{jk} nastavovací doba nezávislá na stroji

- **Problém obchodního cestujícího** $= 1|s_{jk}|C_{\max}$
  - příklad: cesta přes města 12341 odpovídá $s_{12} + s_{23} + s_{34} + s_{41}$

- Klasický příklad: plnění limonád do lahví
  - dána cena za nastavení stroje při změně plnění typu limonády
  - $s_{cola,voda}$ $s_{voda,cola}$ $s_{cola,dzus}$
  - posloupnost plnění: 100 lahví vody, 50 lahví coly, 70 lahví džusu,

- **Nastavovací cena** c_{ijk}, c_{jk}
  - s přechodem lze spojit i cenu, kterou je nutne zaplatit

Doba na dopravu *(transportation time)*



Multi-operační rozvrhování

- úloha se skládá z několika operací
- může/nemusí být určeno pořadí operací
- operace má zadáno
  - dobu provádění, konkrétní stroj k provádění
- stroj: na každém stroji maximálně jedna operace
- **doba na dopravu** t_{hl} mezi stroji h a l: **závislá na strojích**
  - kapacita cest mezi stroji neomezená
  - délka cesty mezi stroji = součet odpovídajících dob na dopravu
- cíl: realizovat všechny operace všech úloh

  při minimalizaci času dokončení všech úloh

Grafová reprezentace

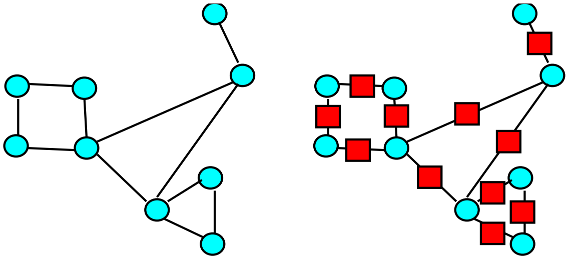
- **orientovaný hranově ohodnocený graf**
- vrchol: stroj
- hrana: pokud lze přejít přímo z jednoho stroje na druhý
- ohodnocení hrany: doba na dopravu z jednoho stroje na druhý

Plánování na počítačové síti

- Stroj: dán počet procesorů
- Úlohy prováděny na jednom uzlu počítačové sítě
  - vyžadují několik procesorů
- Úlohy potřebují k výpočtu **data**
  - data dané velikosti na jednom nebo více uzlech
  - data je nutné přenést na uzel, kde se úloha bude počítat
  - realita: data jsou často zreplikována na několika uzlech
- Linka:
  - **propustnost** = kapacita linky
  - **latence** = doba nutná na přenos dat po lince
- Cíl: **realizovat všechny úlohy tak, jak dynamicky přibývají**
  - úlohy musí mít dostatek procesorů
  - data musí ležet v době výpočtu na uzlu, kde se počítá úloha
  - je nutné plánovat i přenosy dat tak, aby bylo možné data přenést vzhledem k latenci i propustnosti linek na cestě

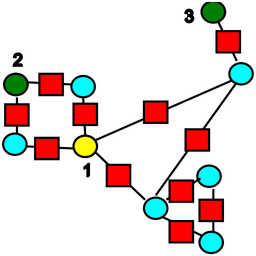
Počítačová síť: grafová reprezentace

- **Vrcholově ohodnocený neorientovaný graf**
- **Vrchol: stroj nebo linka**
- Ohodnocení vrcholu-stroje: počet procesorů
- Ohodnocení vrcholu-linky: propustnost linky
  - **linka je chápána jako zdroj, jehož kapacita odpovídá propustnosti**
  - **doba trvání úlohy na lince odpovídá latenci**
- Hrany: pokud jsou stroje A a B přímo spojeny linkou C, pak existují hrany AC a BC

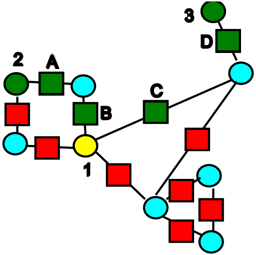


Plánování úlohy na počítačové síti: příklad

- Úloha naplánována k provádění na uzlu 1
- Data na uzlech 2 a 3



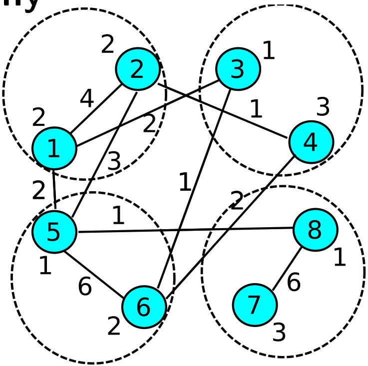
- Data jsou přenesena přes D,C a A,B
- Propustnost/kapacita linky/zdrojů A,B,C,D musí být v daném čase postačující
- Celková doba přenostu do 1: max(latenceA+latenceB, latenceD+latenceC)



Otázky:

- Je možné takovouto úlohu naplánovat za probíhajícího provozu na síti?
- Je možné ji naplánovat při modifikaci cest pro přenosy?
- Obecně: jak naplánovat úlohu(y) za daného provozu na síť? směrování

Paralelní komunikující úlohy



Paralelní aplikace

- n komunikujících úloh
- m procesorů
- několik úloh prováděno **zároveň** na každém procesoru

Grafová reprezentace

- **hranově a vrcholově ohodnocený neorientovaný graf**
- ohodnocené vrcholy: úlohy s danou výpočetní náročností
- ohodnocené hrany: **průběžně** komunikující úlohy s komunikační náročností

Vyvažování zátěže *(load balancing)*: přiřazení úloh na procesory tak, aby byla

- vyvážená zátěž jednotlivých procesorů
- minimalizována komunikace úloh na různých procesorech

Rozdělení grafu

Formulace problému vyvažování zátěže jako problému rozdělení grafu *(graph partitioning)*

Rozdělení grafu $G = (V, E)$ na $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ tak, že je

- $V_1 \cap \cdots \cap V_m = \emptyset$
- $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_m = (V_m, E_m)$
- E_i tvořeno hranami, jejichž oba vrcholy patří do V_i
- součet ohodnocení vrcholů v jednotlivých V_i „zhruba stejný"
- součet ohodnocení hran $E \backslash \{E_1 \cup \cdots E_m\}$ spojujících různé V_j a V_k minimalizován

Rozdělení grafu a bisekce grafu

Speciální případ: $V = V_1 \cup V_2$ **bisekce grafu (graph bisection)**, tj. z grafu $G = (V, E)$ vytvoříme dva podgrafy (V_1, E_1) (V_2, E_2) tak, že

- $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- E_i tvořeno hranami, jejichž oba vrcholy patří do V_i, tj. $E_1, E_2 \subset E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, E_i
- součet ohodnocení vrcholů ve V_1 a V_2 je „zhruba stejný"
- součet ohodnocení hran $E \backslash \{E_1 \cup E_2\}$ spojující vrcholy z V_1 a V_2 je minimalizován

Jak nalézt vhodné rozdělení grafu?

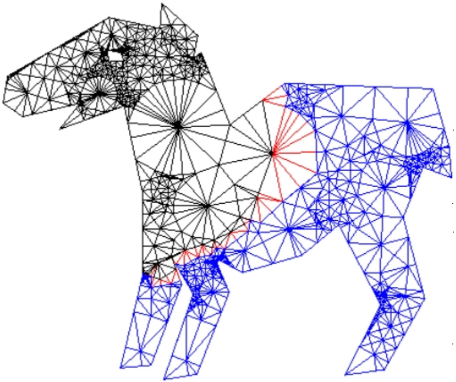
- problém optimálního rozdělení je NP-úplný
  - už pro bisekci: prohledání všech podmnožin množiny vrcholů (podmnožina a její doplněk tvoří V_1 a V_2)
- nutné použít dobré heuristiky

Heuristika: opakovaná bisekce grafu

Základní používaný princip při rozdělení grafu:

rozdělení množiny vrcholů V na 2^k částí:

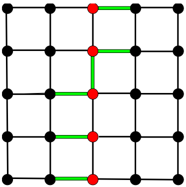
rekurzivní bisekce grafu k-krát



58 dělících hran

Dělící hrany (edge separator) vs. dělící vrcholy (vertex separator)

- **Dělící hrany**: $E_S \subseteq E$ dělí G po odstranění E_S z E na dvě stejně velké nesouvisející komponenty V: V_1 a V_2
- **Dělící vrcholy**: $V_S \subseteq V$ dělí G po odstranění V_S a všech jejich hran na dvě stejně velké nesouvisející komponenty V: V_1 a V_2

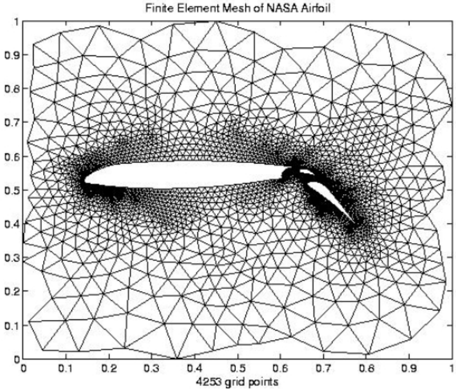


E_S = zelené hrany
V_S = červené vrcholy

Rozdělení se souřadnicemi vrcholů (partitioning with nodal coordinates)

Myšlenka rozdělení pomocí souřadnic vrcholů

- každý vrchol má souřadnice v prostoru → **rozdělení prostoru**



- pomocí dělicí přímky, která dělí vrcholy v prostoru na poloviny

Opakovaná bisekce grafu s dělící přímkou: příklad