PB165 – Grafy a sítě

9. Toky v síti

Obsah přednášky

Řez v grafu

Neformálně:

- „Rozříznutí“ grafu napříč hranami (nikoliv skrz vrcholy) na dvě poloviny.
- Rozdělení vrcholů na dvě části.

Definice

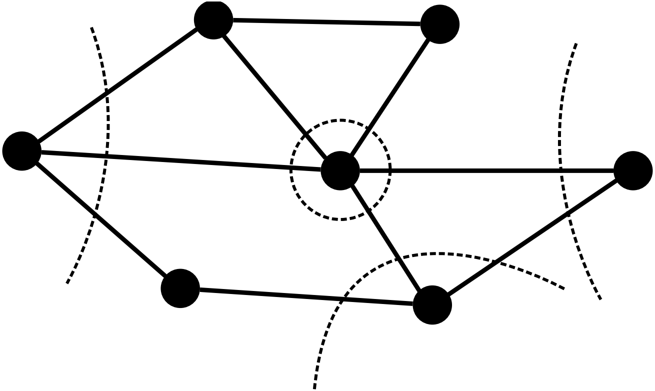
Řezem v grafu $G = (V, E)$ nazýváme rozklad množiny V na 2 neprázdné podmnožiny $P, \overline{P}$. $W_G(P)$ je množina všech hran, jejichž jeden vrchol je v P a druhý nikoliv.

Jelikož se jedná o rozklad, platí:

$$P \cap \overline{P} = \emptyset, P \cup \overline{P} = V$$

Řezy v grafu

V každém grafu existuje $2^{|V|-1} - 1$ řezů.

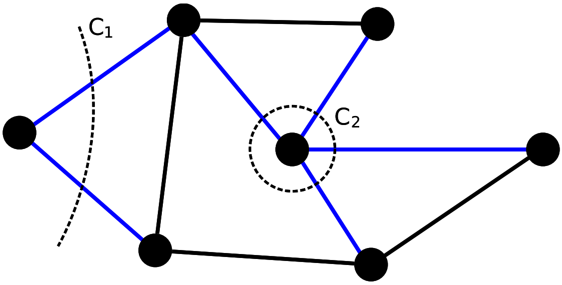


Obrázek: Příklady řezů v grafu jsou vyznačeny čárkovaně.

Hrany křižující řezy

Definice

Nechť řez C dělí vrcholy na množiny $P, \overline{P}$. O hranách (u, v), jejichž jeden vrchol leží v P a druhý nikoliv, říkáme že křižují řez C.



Obrázek: Hrany křižující řezy C_1, C_2 jsou vyznačeny modře.

Bipartitní grafy

Definice

Bipartitiní graf je takový graf G, jehož množina vrcholů je disjunktním sjednocením dvou množin S a T a platí $E(G) = W_G(S)$. Množiny S a T nazýváme stranami bipartitního grafu.

Každá hrana grafu G má jeden vrchol v S a druhý v T.

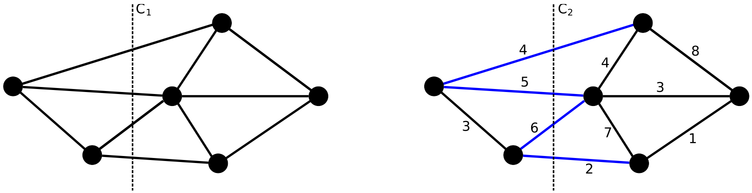
Definice

Úplný bipartitní graf je takový bipartitní graf, jehož každý dvojice vrcholů (s, t), $s \in S$ a $t \in T$ je spojena právě jednou hranou.

Váha řezu

Definice

Vahou řezu v hranově neohodnoceném grafu označujeme počet hran, které tento řez křižují.
V hranově ohodnoceném grafu se vahou rozumí součet ohodnocení všech hran křižujících tento řez.



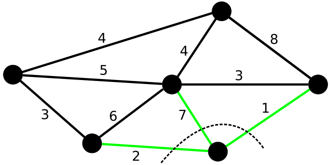
Obrázek: Váha řezu C_1 v neohodnoceném grafu je rovna 4. Váha řezu C_2 v ohodnoceném grafu je rovna 17.

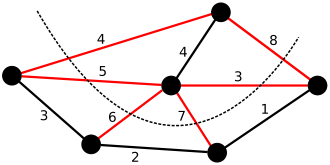
Minimální a maximální řez

Definice

Minimálním rozumíme takový řez v grafu, jehož váha je minimální. Maximální řez je naopak ten s maximální vahou.

Minimální řez v grafu může být nalezen v čase polynomiálním vůči velikosti grafu. Naopak, problém maximálního řezu je NP-úplný.





Obrázek: Minimální řez ve vyobrazeném grafu je vyznačen zeleně, maximální červeně.

Síť a tok

Definice

Sítí nazýváme orientovaný, hranově ohodnocený graf $G = (V, E)$.

Definice

Tokem v síti nazýváme takové ohodnocení hran reálnými čísly $f : E(G) \to \mathbb{R}$*, které pro každý vrchol* v *splňuje Kirchhoffův zákon*

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e)$$

Takový graf si můžeme představit jako soustavu potrubí, pro níž platí zákon zachování hmoty, tj. kolik do vrcholu přitéká, tolik z něj zase vytéká.
Orientace hrany určuje směr proudění, záporný tok představuje proudění proti směru hrany.

Cirkulace a zdroj a spotřebič

Pokud Kirchhoffův zákon platí pro všechny vrcholy, mluvíme o *cirkulaci*.
Alternativou je tv. *tok od zdroje ke spotřebiči*, kde dva vrcholy Kirchhoffův zákon nesplňují. Ve *zdroji* tok vzniká a ve *spotřebiči (stok, výlevka, sink)* zaniká.
Tok od zdroje ke spotřebiči můžeme vždy převést na cirkulaci přidáním hrany spojující zdroj a spotřebič. Takovou hranu nazýváme *návratovou hranou*.

Přípustný tok

Zpravidla omezujeme tok na hraně shora i zdola, tj. platí $f(e) \in \langle l(e), c(e) \rangle$. Číslo $c(e)$ nazýváme *kapacitou* hrany, případně *horním omezením toku v hraně*. Číslo $l(e)$ nazýváme *dolním omezením toku v hraně*. Tok, který splňuje $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$ pro všechny hrany e nazýváme *přípustným tokem*.
V řadě praktických případů bývá dolní omezení toku zpravidla rovno 0, je-li však nenulové, není a priori jasné, zda existuje přípustný tok v síti.

Příklady sítí

Výše definované *sítě* jsou vhodnými reprezentacemi reálných sítí. Klasická teorie grafů se velmi často věnuje problémům toků na železničních, silničních a dalších dopravních sítích. Samostatnou oblastí jsou rozvodné sítě – vodovodní, plynové atd. Obecně mluvíme o *transportních sítích*. Většina úloh je věnována optimalizaci takovýchto sítí, případně nalezení úzkých míst, maximální kapacity (propustnosti) sítě, garance minimální propustnosti i při výpadku některých linek či vrcholů apod.
Pro nás jsou zajímavé toky v počítačových sítích.
Na řešení úloh s toky lze převést i řadu plánovacích úloh, např. tzv. *přiřazovací* úlohy. V těch máme za úkol přiřadit n úkolů mezi pracovníky tak, abychom minimalizovali náklad (provedení konkrétní úlohy konkrétním pracovníkem má svou cenu). Lze převést na bipartitní graf (pracovníci jsou zdroje a úlohy jsou spotřebiče, hrana představuje cenu práce).

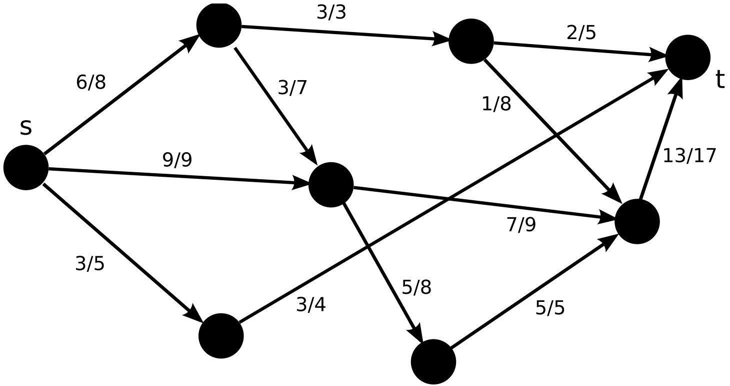
Reziduální tok

Definice

Reziduální kapacitou hrany e rozumíme číslo $c(e) - f(e)$*, tj. rozdíl kapacity hrany a aktuálního toku.*

Reziduální kapacity hran tvoří reziduální síť.
V mnoha případech potřebujeme zjistit, zda reziduální síť existuje.
Hrany s reziduální kapacitou nula nejsou v reziduální síti obsaženy (není možné přes ně vést nenulový tok).

Toky v síti – příklad



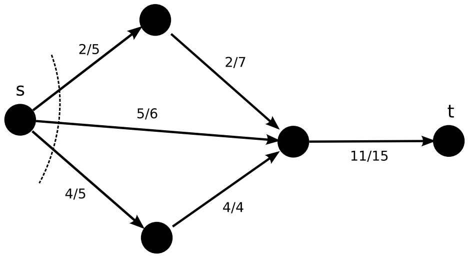
Obrázek: Příklad toku v síti. První číslo v hodnocení hrany je tok, druhé kapacita hrany

Velikost toku

Velikost toku značíme $F(f)$. Velikost toku od zdroje ke spotřebiči definujeme jako množství toku, které vzniká ve zdroji s.

$$F(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e)$$

E^+, E^- označují součet toků vstupujících do vrcholu, resp. vystupujících z něj.



Obrázek: Velikost vyobrazeného toku (11) je dána množstvím toku opouštějícím zdroj.

Velikost toku přes řez

Nechť řez C dělí vrcholy grafu na množiny $P, \overline{P}$. Označíme jej C_P. Dále nechť zdroj toku náleží do množiny P a spotřebič do $\overline{P}$.Potom má smysl definovat velikost F_P toku přes řez C_P jako rozdíl mezi velikostí toku na hranách vedoucích z množiny P a velikostí toku na hranách vedoucích do této množiny. Říkáme, že řez C_P *odděluje* zdroj a spotřebič.

$$F_P(f) = \sum_{e \in W^+(P)} f(e) - \sum_{e \in W^-(P)} f(e)$$

W^+, W^- značí hrany vycházející z množiny W, resp. do ní vstupující.

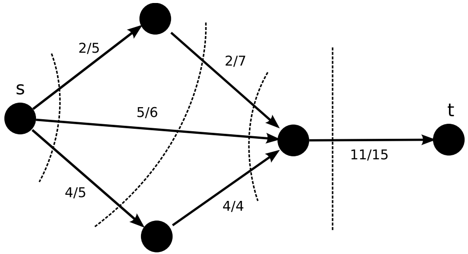
Shodnost toků přes řezy

Věta

Nechť C_P je libovolný řez, který odděluje zdroj a spotřebič. Potom pro velikost F_P toku přes C_P platí

$$F_P(f) = F(f)$$

Přes všechny řezy oddělující zdroj a spotřebič tedy protéká stejný tok.



Obrázek: Přes všechny vyznačené (i nevyznačené) řezy oddělující s a t protéka tok o velikosti 11.

Shodnost toků přes řezy – důkaz

Důkaz.

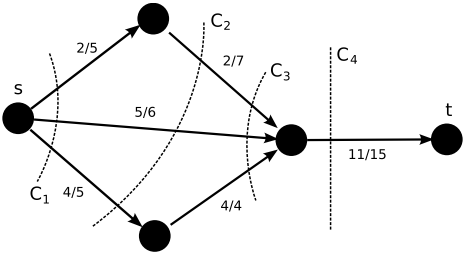
Důkaz povedeme indukcí:
Základ indukce: Položme $P = \{s\}$, kde s je zdroj toku. Tvrzení platí z definice.
Indukční krok: Do množiny P přidáme libovolný vrchol grafu, různý od spotřebiče. Jelikož pro tento vrchol musí platit Kirchhoffův zákon, nezmění se nikterak rozdíl mezi velikostmi toků z P vytékajících a do P vtékajících. Platnost tvrzení se tedy nezmění. Jelikož postupným přidáváním vrcholů lze získat libovolný řez, který odděluje zdroj od spotřebiče, platí tvrzení pro všechny řezy zdroj od spotřebiče oddělující. $\square$

Kapacita řezu

Kapacita řezu oddělujícího zdroj a spotřebič specifikuje, jaký maximální tok může tímto řezem protéct. Definována je jako součet kapacit všech hran, které tento řez protínají ve směru od zdroje ke spotřebiči zmenšená o součet minimálních kapacit hran opačně orienovaných.

$$C(C_P) = \sum_{e \in W^+(P)} c(e) - \sum_{e \in W^-(P)} l(e)$$

Obrázek: Kapacity řezů $C_1, \ldots, C_4$ jsou po řadě 16, 18, 17, 15.



Kapacita řezu má význam pro nalezení tzv. maximálního toku v grafu.

Maximální tok v grafu

Problém maximálního toku je hledání největšího toku v grafu od zdroje ke spotřebiči. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Tok f je maximální (maximalizujeme $F(f)$).
2. $|f|$ je kapacita některého řezu oddělujícího zdroj od spotřebiče.
3. V reziduální síti neexistuje cesta ze zdroje ke spotřebiči.

Algoritmy pro nalezení maximálního toku vycházejí z těchto ekvivalencí – hledají řez s minimální kapacitou nebo přidávají cesty mezi zdrojem a spotřebičem, dokud nějaké v reziduální síti existují.

Algoritmus – brutální síla

- Nejjednodušší algoritmus.
- Generuje postupně všechny podmnožiny vrcholů, pro každý provede následující kroky:
  - Najde mezi hranami všechny, které křižují řez definovaný touto množinou vrcholů.
  - Sečte kapacity hran křižujících tento řez, směřujících od zdroje ke spotřebiči.
- Výsledkem je řez s minimální vypočtenou kapacitou.

Jelikož všech řezů oddělujících zdroj od spotřebiče je $2^{|V|-2} - 1$, pro každý je potřeba zkontrolovat všech $|E|$ hran, celková časová složitost algoritmu hledání maximálního toku brutální silou je $\mathcal{O}(2^{|V|-2}|E|)$

Zlepšující cesta

Definice

Hranu nazveme hranou vpřed, je-li orientována v smeru průchodu cestou. Hrana vzad je pak orientována proti směru průchodu cestou.

Definice

Zlepšující cestou vzhledem k toku f nazveme takovou neorientovanou cestu ze zdroje ke spotřebiči, jejíž každá hrana splňuje $f(e) < c(e)$ pro hranu e vpřed a $f(e) > l(e)$ pro hranu vzad.

Definice říká, že aktuální tok lze zvýšit na hranách vpřed a snížit na hranách vzad o nějakou hodnotu $d > 0$.

Definice

Kapacitou zlepšující cesty pak rozumíme maximální hodnotu d, o kterou lze tok na zlepšující cestě změnit.

Ford-Fulkersonův algoritmus

- Využívá ekvivalence mezi maximalitou toku a neexistencí cesty ze zdroje ke spotřebiči v reziduální síti.
- Hledá *zlepšující* cesty mezi zdrojem a spotřebičem, dokud nějaká taková existuje.
- Pro hledání cest používá i zpětných hran.
- Z hran na cestě se vybere ta, jejíž reziduální kapacita je minimální.
    - V případě zpětné hrany (projité proti směru její orientace) se namísto hodnoty $c(e) - f(e)$ bere tok, který hranou protéká ve směru její orientace – tedy $f(e) - l(e)$. Toky se takto mohou vzájemně anulovat.
- O tuto minimální kapacitu se zvýší tok po všech dopředných hranách na nalezené cestě.
    - Naopak, na hranách zpětných se hodnota toku sníží o stejnou hodnotu.

Hledání zlepšující cesty

Můžeme použít *značkovací proceduru* ($P_V(e)$ je počáteční a $K_V(e)$ je koncový vrchol hrany e):

Inicialiace Označkujeme vrchol zdroje, ostatní jsou bez značek.

Vpřed Existuje-li hrana e taková, že $P_V(e)$ má značku a $K_V(e)$ nemá a současně platí $f(e) < c(e)$, pak označkuj $K_V(e)$.

Vzad Existuje-li hrana e taková, že $K_V(e)$ má značku a $P_V(e)$ nemá a současně $l(e) < f(e)$, pak označkuj $P_V(e)$.

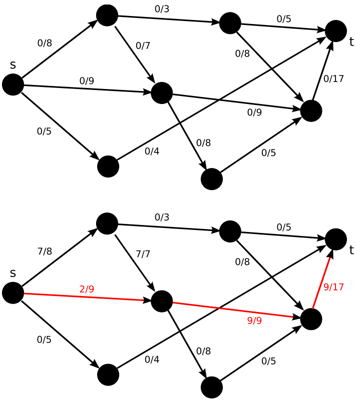
Ukončení Je-li označkován spotřebič, nalezli jsme zlepšující cestu. Nelze-li další vrchol označkovat, pak zlepšující cesta neexistuje.

Ford-Fulkersonův algoritmus

```
Pro všechny hrany (u,v)
| f(u,v) = 0
Dokud existuje zlepšující cesta p:
| Vyber minimální kapacitu d hrany na této cestě.
| Pro všechny hrany na cestě p:
| | f(u,v) = f(u,v) + d
| | f(v,u) = f(v,u) - d
```

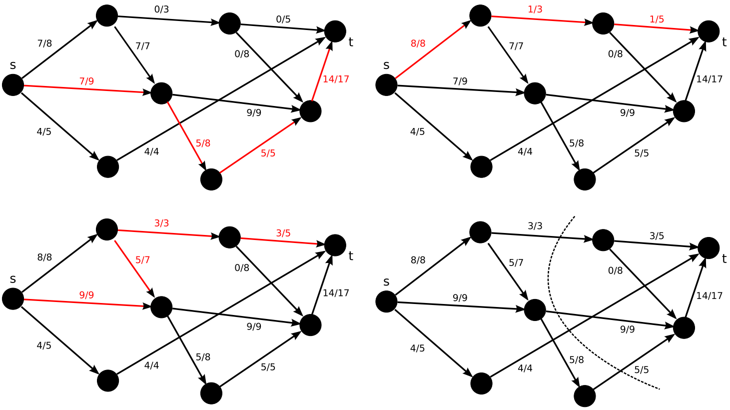
Algoritmus neříká, jakým způsobem se má cesta ze zdroje ke spotřebiči hledat. V praxi se používá obvykle průchod do hloubky, nebo průchod do šířky, čímž se z algoritmu stává Edmonds-Karpův (viz dále).

Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad



Obrázek: Příklad běhu Ford-Fulkersonova algoritmu, 1. část.

Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad



Obrázek: Příklad běhu Ford-Fulkersonova algoritmu, 2. část. Minimální řez je vyznačen na posledním obrázku. Kapacita je 21, což je i maximální tok v tomto grafu.

Ford-Fulkersonův algoritmus – složitost

- V obecném případě není možné dokázat, že běh algoritmu skončí.
- V některých případech nemusí hodnota nalezeného toku ani konvergovat k maximu.

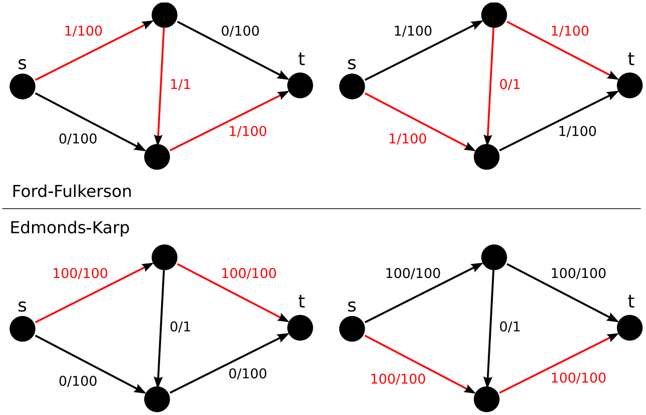
V reálných aplikacích jsou kapacity hran obvykle reprezentovány celými čísly. To zaručuje ukončení běhu algoritmu:

- Maximální tok má v takovém případě také celočíselnou hodnotu.
- Časová složitost nalezení zlepšující cesty je $\mathcal{O}(|E|)$
- S každou nalezenou zlepšující cestou se hodnota nalezeného toku zvýší minimálně o 1.
- Maximálně může tedy proběhnout nejvýše $F(f)$ iterací.

Edmonds-Karpův algoritmus

- Specializace Ford-Fulkersonova algoritmu.
- Pro hledání zlepšujicích cest je použit průchod do šířky.
- Pro potřeby průchodu do šířky jsou délky hran považovány za jednotkové.
- Průchod do šířky zajistí, že každá nalezená zlepšující cesta je nejméně tak dlouhá, jako předchozí nalezená.
- Maximální možná délka zlepšující cesty je $|V|$.
- Složitost algoritmu tak činí $\mathcal{O}(VE^2)$.

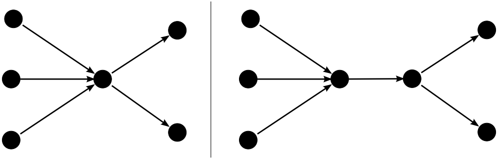
Edmonds-Karpův algoritmus – příklad



Obrázek: V horní části obrázku je znázorněn možný počátek běhu Ford-Fulkersonova algoritmu. Běh může pokračovat stejným způsobem i nadále, a tak potřebovat mnoho iterací. Edmonds-Karpův algoritmus nalezne odpověď během 2 iterací.

Omezení toku vrcholem

Reálné aplikace mohou klást i omezení na velikost toku procházejícího vrcholem – např. sběrné místo kanalizací, aktivní prvek v síti, rychlost zpracování dat na příjemci. Pokud jsou toky nezáporné, lze použít následující transformaci grafu:

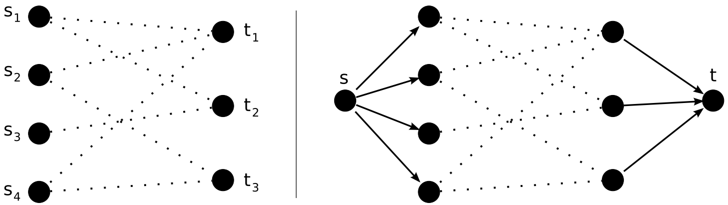


Obrázek: Vrchol je nahrazen dvěma vrcholy a hranou.

Vrchol v s omezenou kapacitou nahradíme vrcholy v_1, v_2, jejichž kapacita nebude omezena. Hrany směřující do v přesměrujeme do v_1, hrany z v vycházející budou vycházet z v_2. Vrcholy v_1, v_2 spojíme hranou, jejíž kapacita bude rovna původní kapacitě vrcholu v. Na takový graf je poté možno použít standardní algoritmy pro hledání maximálního toku.

Několik zdrojů a spotřebičů

Obdobně lze standardní algoritmy použít i v případě, kdy zadání obsahuje více než 1 zdroj nebo spotřebič:



K síti přidáme fiktivní zdroj a spotřebič. Z nově přidaného zdroje povedou hrany (s „neomezenou“ kapacitou) do všech zdrojů, obdobně přidáme hrany ze všech spotřebičů do nově přidaného.

Nejlevnější toky

Ke každé hraně je krom její kapacity definována i cena $a(e)$ jednotkového toku. Cena toku hranou e je potom rovna $a(e)f(e)$. Celková cena toku sítí je potom definována jako

$$\sum_{e \in E} a(e)f(e).$$

Úkolem je potom najít maximální tok sítí takový, že jeho cena bude zároveň minimální.

Přípustná cirkulace

Pokud se omezíme na *cirkulace*, je celá řada algoritmů (a odpovídající teorie) jednodušší. A platí, že úlohy týkající se přípustného toku od zdroje ke spotřebiči lze převést na hledání přípustné cirkulace přidáním návratové hrany.

Věta

V síti s omezeními toku l a c existuje přípustná cirkulace právě tehdy, když každý řez má nezápornou kapacitu

$$C(C_P) = \sum_{e \in W^+(P)} c(e) - \sum_{e \in W_-(P)} l(e) \geq 0$$

Algortimus pro přípustnou cirkulaci

Vstupem je síť G s omezeními toku l, c a libovolná (i nulová) cirkulace f. Výstupem je buď přípustná cirkulace f' nebo řez se zápornou kapacitou.

1. Najdeme hranu h s nepřípustným tokem. Pokud taková hrana neexistuje, výpočet končí a dosavadní tok f' je přípustný.
2. Je-li $f(h) < l(h)$, pak $z := K_V(h), s := P_V(h)$, v opačném případě $(f(h) > c(h))$ $z := P_V(h), s := K_V(h)$.
3. Nalezneme zlepšující cestu z vrcholu z do vrcholu s. Pokud cesta neexistuje, výpočet končí, přípustná cirkulace neexistuje a množina označkovaných vrcholů P určuje řez C_P, který má zápornou hodnotu.
4. Pokud cesta existuje, doplníme zlepšující cestu o hranu h, čímž vznikne zlepšující kružnice. Vypočteme její kapacitu, změníme toky na jejích hranách (viz předchozí algoritmy). Pak se vracíme zpět na krok 1.