Příklady o relacích

Zkoušejte hledat řešení (důkazy) pro následující příklady.
Mnoho zdaru!

Příklad 2.1. Na množině všech přirozených čísel od 0 do 1000 definujeme binární relaci R následovně: $(a, b) \in R$ právě když platí

a) $-1 \leq a^2 - b^2 \leq 4$,

b) $0 \leq a - b \leq 1$ nebo číslo a je trojnásobkem čísla b,

c) $0 \leq a - b \leq 1$ nebo číslo a je polovinou čísla b.

Odpovězte, jaké vlastnosti relace R má: je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní? Pokud některou z těchto vlastností relace R nemá, napište konkrétními čísly protipříklad.

Řešení. a) Není těžké zjistit, že v relaci jsou všechny dvojice (x, x), tedy je to reflexivní relace. Dále zjistíme, že mimo reflexivních dvojic jsou v relaci R už jen dvojice $(0, 1), (1, 0), (2, 0), (2, 1)$. Hrubou silou (probráním těchto pár dvojic) pak ověříme, že relace je i tranzitivní. Pro protipříklad, že R není symetrická, máme $(2, 0) \in R$, ale $(0, 2) \notin R$. Jelikož dále $(0, 1), (1, 0) \in R$, ale $0 \neq 1$, není R ani antisymetrická.

b) Tato relace je opět reflexivní. Jinak $(9, 3), (3, 1) \in R$, ale $(9, 1) \notin R$ ani $(1, 3) \notin R$, takže R není tranzitivní ani není symetrická. Po chvilce zkoumání také přijdeme na to, že z $(a, b) \in R$ vyplývá $a \geq b$, takže R je antisymetrická.

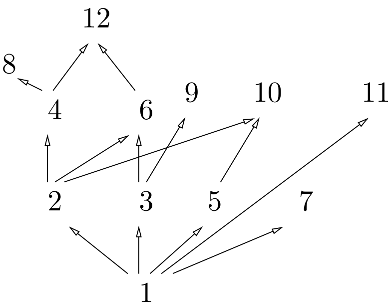
c) Tato relace je opět reflexivní. Žádnou z dalších jmenovaných vlastností nemá, jak zjistíme z toho, že $(1, 2), (2, 1) \in R$, ale $1 \neq 2$, dále $(3, 2) \in R$, ale $(2, 3), (3, 1) \notin R$. $\square$

Příklad 2.2. Mějme relaci soudělnosti nad přirozenými čísly, kde dvě čísla x, y jsou v relaci pokud mají společného dělitele většího než 1. Které z vlastností z Definice tato relace má?

Řešení. Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní. $\square$

Příklad 2.3. Nakreslete si částečné uspořádání dělitelností čísel $1, \ldots, 12$ Hasseovým diagramem.
a) Jaký je v něm nejdelší řetězec?
b) Je v něm nejmenší či největší prvek?
c) Kolik je tam maximálních prvků?

dělitelnost:



Řešení.

a) délky 4 b) nejmenší 1, největší není c) 6 □

Příklad 2.4. Na systémy všech 5-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 12\}$ definujeme ekvivalenci následovně: Dvě množiny jsou ekvivalentní, pokud mají stejné nejmenší číslo. Kolik tříd ekvivalence v příslušném rozkladu získáme? Jak velká je největší třída?

Řešení. 8 tříd (s minimy $1, ..., 8$), nejvíce je s minimem 1 – celkem $\binom{11}{4}$. □

Příklad 2.5. Na množině všech slov-řetězců nad běžnou abecedou definujme relaci následovně: Slovo x je v relaci se slovem y pokud je y obsaženo jako podřetězec v x. O jaký známý typ relace se jedná? Zdůvodněte.

Řešení. Reflexivní, antisymetrická, tranzitivní, tedy částečné uspořádání. Lineární není, protože dvě slova nemusí být porovnatelná. □

Příklad 2.6. Na množině všech slov-řetězců nad běžnou abecedou definujme relaci následovně: Slovo x je v relaci se slovem y pokud lze x získat z y jen přeházením písmen. O jaký známý typ relace se jedná? Zdůvodněte.

Řešení. Reflexivní, symetrická, tranzitivní, tedy ekvivalence. □

Příklad 2.7. Mezi všemi studenty na přednášce UInf definujeme následující binární relaci: Každý student je v relaci sám se sebou, tj. je to reflexivní relace. Každý student A je v relaci s jiným studentem B, právě když B sedí

a) ve stejné řadě nalevo od A,

b) ve stejné řadě jako A nebo v řadě hned za A,

c) v poslední řadě (nezáleží, kde sedí A),

d) v některé řadě před A.

Jaké vlastnosti má tato relace (jako symetrická, antisymetrická, tranzitivní)? Jedná se třeba o částečné uspořádání nebo o ekvivalenci? Vaši odpověd dobře zdůvodněte.

Řešení.

a) je to částečné uspořádání,

b) není symetrická, antisymetrická ani tranzitivní,

c) je tranzitivní, ale ne symetrická ani antisymetrická,

d) je to částečné uspořádání. $\square$