IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 2 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Důkaz vět typu „tehdy a jen tehdy“. Množiny, vztahy mezi množinami, operace nad množinami.

Příklad 1.

Rozhodněte, zda 1 patří do množiny ($\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel, $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel)

a) $\{1, 2, \{1\}\}$
b) $\{\{1\}, \{\{1\}\}\}$
c) $\{\{1, 2\}, \{1, \{1\}\}\}$
d) $\{\{\{1\}\}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ je celé číslo větší než } 1\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ je třetí mocninou přirozeného čísla}\}$
g) $\{3z + 7 \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Řešení

a) Ano.
b) Ne. Množina má prvky $\{1\}$ (množina obsahující 1) a $\{\{1\}\}$ (množina obsahující množinu obsahující 1). Ani jeden z nich není 1.
c) Ne. Podobně jako v předchozím příkladě má množina dva prvky (jaké?), ani jeden z nich není 1.
d) Ne. Množina má jediný prvek: množinu obsahující množinu obsahující 1, což není 1.
e) Ne. Protože 1 je reálné číslo, tj. $1 \in \mathbb{R}$, stačí ověřit, zda splňuje podmínku „1 je celé číslo větší než 1“. To ale není pravda, neboť $1 \not< 1$.
f) Ano. Podobně jako v předchozím příkladě musíme ověřit, zda 1 splňuje podmínku „1 je třetí mocninou přirozeného čísla“. To platí, protože $1 = 1^3$ a 1 je přirozené číslo.
g) Ano. Aby 1 patřila do množiny, musíme ověřit, že existuje celočíselné řešení rovnice $3z + 7 = 1$. Řešením této rovnice je $z = -2$, což je celé číslo.

Příklad 2.

V termínech dělitelnosti charakterizujte prvky množiny

a) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
b) $\{4n + 2 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Řešení

a) Množina přirozených čísel dělitelných třemi.
b) Množina přirozených čísel, jejichž zbytek po dělení čtyřmi je 2.

Příklad 3.

Výčtem prvků popište následující množiny (tj. vypište všechny jejich prvky):
a) $A = 2^{\{a\}}$
b) $B = 2^{\{a,\{a\}\}}$
c) $C = 2^{\{a,b,c\}}$
d) $D = 2^{\{a,\{b,c\}\}}$
e) $E = 2^{\emptyset}$
f) $F = 2^{\{\emptyset\}}$
g) $G = 2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}}$

Řešení

a) $A = \{\emptyset, \{a\}\}$
b) $B = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$
c) $C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
d) $D = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$
e) $E = \{\emptyset\}$
f) $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
g) $G = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
Jaký je rozdíl mezi množinami B a G?

Příklad 4.

Co můžete říct o množinách A a B, když víte, že platí následující vztahy? Svá tvrzení dokažte. (Nápověda: použijte relace $\subseteq$ a $=$ mezi množinami, případně jiné operace nad množinami a prázdnou množinu.)
a) $A \cap B = A$
b) $A \cup B = A$
c) $A \setminus B = A$
d) $A \setminus B = \emptyset$

Řešení

a) Platí $A \subseteq B$. **Pokud jste na to nepřišli, zkuste to nyní alespoň dokázat.**
Dokazujeme tvrzení „$A \cap B = A$ implikuje $A \subseteq B$“. Důkaz provedeme přímo. Neboť $A \cap B = A$, platí $A \subseteq A \cap B$, neboli každý prvek A patří do množiny A a zároveň patří do množiny B. Tedy každý prvek množiny A patří do množiny B, tj. $A \subseteq B$.
b) Platí $B \subseteq A$. **Pokud jste na to nepřišli, zkuste to nyní alespoň dokázat.**
Dokazujeme tvrzení „$A \cup B = A$ implikuje $B \subseteq A$“. Podobně jako v předchozím případě provedeme důkaz přímo. Neboť $A \cup B = A$, platí $A \cup B \subseteq A$, neboli každý prvek z množiny A nebo z množiny B je prvkem množiny A. Tedy každý prvek množiny B je prvkem množiny A, tj. $B \subseteq A$.
c) Platí $A \cap B = \emptyset$. **Pokud jste na to nepřišli, zkuste to nyní alespoň dokázat.**
Dokazujeme tvrzení „$A \setminus B = A$ implikuje $A \cap B = \emptyset$“. Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy $A \setminus B = A$ a zároveň $A \cap B \neq \emptyset$. Protože $A \cap B$ je neprázdná množina, existuje $x \in A \cap B$, tj. $x \in A$ a $x \in B$. Z definice rozdílu množin dostáváme, že $x \notin A \setminus B$.

Ovšem $x \in A$, takže by neplatilo $A \setminus B = A$ (množiny na levé a pravé straně rovnosti by se lišily v prvku x). Takže $A \cap B$ musí být prázdná množina.

d) Platí $A \subseteq B$. **Pokud jste na to nepřišli, zkuste to nyní alespoň dokázat.**

Dokazujeme tvrzení „$A \setminus B = \emptyset$ implikuje $A \subseteq B$“. Tvrzení dokážeme obměnou, budeme tedy dokazovat tvrzení „$A \nsubseteq B$ implikuje $A \setminus B \neq \emptyset$“.

Nechť tedy $A \nsubseteq B$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $x \notin B$. Tedy z definice rozdílu množin vyplývá $x \in A \setminus B$. Tedy $A \setminus B$ není prázdná množina, což jsme měli dokázat.

Příklad 5.

Mějme množiny A a B, $A \subseteq M$ a $B \subseteq M$ pro nějakou množinu M. Ukažte, že $A \subseteq B$ platí právě tehdy, když $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Řešení

Jedná se o větu typu „tehdy a jen tehdy“. Přestože se jedná o velmi jednoduchý důkaz, budeme se držet šablony pro důkazy vět tohoto typu. Dokážeme tedy dvě implikace: zleva doprava ($\Rightarrow$) a zprava doleva ($\Leftarrow$).

Připomeňme, že doplňky množin zde implicitně uvažujeme vzhledem k množině M. Ekvivalence $x \notin C \iff x \in \overline{C}$, kde $C \subseteq M$, potom platí pouze tehdy, pokud se omezíme na $x \in M$. Pokud bychom to neudělali, přestane platit implikace jedním směrem. Kterým? Co se stane s platností implikace druhým směrem? Jak se vztahuje tato poznámka k jednotlivým částem důkazu? Který směr se v které části používá?

„$\Rightarrow$“ Dokazujeme implikaci $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, tj. předpokládáme, že $A \subseteq B$. Potom pro libovolné $x \in M$ platí $x \in A \Rightarrow x \in B$. Obměnou implikace dostáváme, že platí $x \notin B \Rightarrow x \notin A$. Tedy $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$, odkud již přímo plyne $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

„$\Leftarrow$“ Dokazujeme implikaci $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$. Nechť tedy $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ a uvažujme $x \in M$ libovolné. Protože platí $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$, platí také $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ a obměnou implikace dostáváme $x \in A \Rightarrow x \in B$. Tedy $A \subseteq B$.

Uvědomte si, že z $x \in A \Rightarrow x \in B$ pro $x \in M$ můžeme uzavřít $A \subseteq B$ pouze tehdy, pokud $A \subseteq M$. Co by se stalo, kdyby to nebyla pravda? Najděte protipříklad.

Příklad 6.

Dokažte, že platí

$$\{2z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{2z - 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

kde $\mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel.

Řešení

Máme dokázat rovnost dvou množin. Musíme tedy dokázat inkluzi zleva doprava a zprava doleva. Označme

$$A = \{2z + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{2z - 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

„$\subseteq$“ Dokazujeme $A \subseteq B$. K tomu stačí dokázat, že $x \in A \Rightarrow x \in B$. Nechť tedy $x \in A$. Potom existuje $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $x = 2z + 1 = 2(z + 1) - 1$. Ovšem $z + 1 \in \mathbb{Z}$, takže $x \in B$.

Pokud jste důkaz nezvládli provést sami, zkuste teď sami alespoň druhou část.

„$\supseteq$“ Dokazujeme $B \subseteq A$. K tomu stačí dokázat, že $x \in B \Rightarrow x \in A$. Nechť tedy $x \in B$. Potom existuje $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $x = 2z - 1 = 2(z-1) + 1$. Protože $z - 1 \in \mathbb{Z}$, platí $x \in A$.

Příklad 7.

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ platí

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

kde A_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou libovolné množiny.
Nápověda: všimněte si podobnosti s příkladem 5 první sady.

Řešení

Abychom mohli mluvit o doplňku množiny, musíme specifikovat nějakou její nadmnožinu, vhledem k níž budeme doplněk určovat. V tvrzení není žádná taková množina explicitně uvedena. Tvrzení by tedy mělo implicitně platit pro každou takovou množinu, vzhledem k níž má smysl určovat doplňky. V dalším budeme předpokládat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme libovolnou množinu M takovou, že platí $A_i \subseteq M$, $i = 1, \ldots, n$. Bude tedy mít smysl vzhledem k ní určovat doplňky množin.

Důkaz povedeme matematickou indukcí vzhledem k n. **Pokud jste nepoužili matematickou indukci, zkuste tvrzení dokázat i tímto způsobem.** Přestože se v základním i indukční kroku jedná o důkaz rovnosti množin, nebudeme zde dokazovat dvě inkluze. V základním kroku bude rovnost zřejmá, v indukčním kroku využijeme již předem známé rovnosti množin.

Pro $n = 1$ rovnost zřejmě platí

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{1} A_i} = \overline{A_1} = \bigcap_{i=1}^{1} \overline{A_i}$$

Pro důkaz indukčního kroku budeme potřebovat rovnost pro $n = 2$. **Tuto rovnost lze znadno dokázat jako dvě inkluze. Udělejte to.**

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

Nechť rovnost platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} = \overline{A_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

(použijeme již dokázanou rovnost pro $n = 2$)

$$= \overline{A_{n+1}} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

(druhý člen upravíme podle indukčního předpokladu)

$$= \overline{A_{n+1}} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}$$

Tím jsme rovnost dokázali pro $n + 1$ a důkaz matematickou indukcí je tak dokončen.