IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 7 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Relace, vlastnosti relací. Ekvivalence. Uspořádání. Vhodně definované vlastnosti relací. Uzávěry relací.

Příklad 1.

Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A\times B}$ je množina všech parciálních funkcí z A do B. Udejte příklad množin A a B a funkcí $e, f, g, h \in \mathcal{F}$ takových, že v uspořádané množině $(\mathcal{F}, \subseteq)$ funkce e pokrývá funkce f a g a funkce f je pokrývána funkcemi e a h.

Řešení

Při řešení použijeme zbabělý trik. Protože v zadání není vyžadováno, aby $f \neq g$ a $e \neq h$, z definice relace pokrytí musí platit pouze $e \neq f \neq h$ a $e \neq g \neq h$. Proto pro jednoduchost můžeme uvažovat $e = h$ a $f = g$. Vy však zkuste najít i takový příklad, kde e, f, g a h jsou čtyři navzájem různé funkce.

Nechť $A = \{a\}$ a $B = \{b\}$, odkud $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(a, b)\}\}$. Potom $e = h = \{(a, b)\}$ a $f = g = \emptyset$ jsou hledané funkce.

Příklad 2.

Rozhodněte, zda jsou následující vlastnosti binárních relací vhodně definované, a svá tvrzení dokažte. U vlastností, které nejsou vhodně definovány, ověřte, zda splňují alespoň jednu z podmínek kladených na vhodně definované vlastnosti.

a) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R má *hvězdičky před očima*, jestliže pro každé $x \in M$ platí: $(x, x) \in R$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$ pro všechna $y \in M$.

b) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *odpudivá*, jestliže pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $(y, z) \in R$.

c) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *přitažlivá*, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$, potom existuje $z \in M$ takové, že $(x, z) \in R$ a $(y, z) \in R$.

d) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *divná*, jestliže $R \circ R \subseteq \mathrm{id}_M$.

e) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *parciální funkcí* z M do M jestliže pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $y = z$. (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí parciální funkce.)

f) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *totální funkcí* z M do M jestliže pro každé $x \in M$ existuje $y \in M$ takové, že $(x, y) \in R$ a pro každé $x, y, z \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$ a $(x, z) \in R$, potom $y = z$. (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí totální funkce.)

Řešení

a) Vlastnost „mít hvězdičky před očima" je vhodně definovaná. K tomu, abychom to dokázali, musíme ukázat, že libovolná relace s hvězdičkami před očima splňuje obě podmínky z definice vhodně definované vlastnosti.

Pro první podmínku předpokládejme, že M je množina, $R \subseteq M \times M$ relace na M. Musíme ukázat, že potom existuje relace $S \subseteq M \times M$ s hvězdičkami před očima taková, že $R \subseteq S$. Položme $S = M \times M$. Snadno se ukáže, že relace S má hvězdičky před očima (udělejte to!), první podmínka je tedy splněna.

Pro druhou podmínku předpokládejme, že M je množina a pro každé $i \in I$, kde I je indexová množina, je $R_i \subseteq M \times M$ relace s hvězdičkami před očima. Musíme ukázat, že relace $\bigcap_{i \in I} R_i$ má také hvězdičky před očima.

Nechť $(a, a) \in \bigcap_{i \in I} R_i$. Potom $(a, a) \in R_i$ pro každé $i \in I$ a protože relace R_i má hvězdičky před očima pro každé $i \in I$, dostáváme, že pro každé $i \in I$ platí $(a, b) \in R_i$ pro každé $b \in M$. Tedy $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ pro každé $b \in M$.

Nechť naopak $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ platí pro každé $b \in M$. Potom volbou $b = a$ dostáváme $(a, a) \in \bigcap_{i \in I} R_i$.

Uměli byste k libovolné relaci $R \subseteq M \times M$ vytvořit její uzávěr s hvězdičkami před očima? Pokud ano, jak?

b) Odpudivost je vhodně definovaná vlastnost.

Nechť M je množina, $R \subseteq M \times M$ relace. Snadno se ověří, že $M \times M$ je odpudivá (dokažte!), takže první podmínka je splněna.

Pro druhou podmínku předpokládejme, že M je množina a pro každé $i \in I$, kde I je indexová množina, je $R_i \subseteq M \times M$ odpudivá relace. Ukážeme, že $\bigcap_{i \in I} R_i$ je také odpudivá relace. Nechť $x, y, z \in M$ jsou libovolné prvky takové, že $(x, y), (x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$. Potom $(x, y), (x, z) \in R_i$ pro každé $i \in I$. Protože relace R_i je odpudivá pro každé $i \in I$, pro každé $i \in I$ platí $(y, z) \in R_i$. Tedy $(y, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$, což bylo dokázat.

Uměli byste k libovolné relaci $R \subseteq M \times M$ vytvořit její odpudivý uzávěr? Pokud ano, jak?

c) Přitažlivost není vhodně definovaná vlastnost.

První podmínka je splněna, protože $M \times M$ je přitažlivá (dokažte!).

Protipříklad pro druhou vlastnost tvoří například množiny $A = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2\}$ a relace $R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c)\}$ a $R_2 = \{(a, b), (b, b)\}$. Potom R_1 i R_2 jsou přitažlivé (dokažte rozborem po jednotlivých prvcích), ale $R_1 \cap R_2 = \{(a, b)\}$, což není přitažlivá relace.

Uměli byste k libovolné relaci $R \subseteq M \times M$ vytvořit její přitažlivý uzávěr? Pokud ano, jak?

d) Divnost není vhodně definovaná vlastnost.

Uvažme relaci $R = M \times M \subseteq M \times M$, kde M je množina. Potom jediná relace S na M, pro kterou platí $R \subseteq S$, je $S = M \times M$, ovšem $M \times M$ není divná, pokud M je alespoň dvouprvková (dokažte!). Tedy divnost nesplňuje první podmínku. Uvědomte si, že jsme zde použili obecnější tvrzení: vlastnost V splňuje první podmínku právě tehdy, když $M \times M$ má vlastnost V. Dokažte toto tvrzení.

Druhou podmínku divnost splňuje, pokud $I \neq \emptyset$. Kdybychom připustili i možnost I, dostali bychom se do problémů, jejichž vysvětlování sahá za rámec těchto příkladů. Problémy mají souvislost s tím, že neplatí první podmínka. Kdyby platila, problémy by se neprojevily.

Nechť tedy M, $I \neq \emptyset$ jsou množiny, $R_i \subseteq M \times M$ divná relace pro každé $i \in I$. Abychom ukázali, že $\bigcap_{i\in I} R_i$ je divná relace, musíme ukázat, že $\bigcap_{i\in I} R_i \circ \bigcap_{i\in I} R_i \subseteq$ $\subseteq \mathrm{id}_M$. K tomu stačí dokázat následující implikaci

$$(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i \circ \bigcap_{i\in I} R_i \Rightarrow a = b$$

Nechť tedy $(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i \circ \bigcap_{i\in I} R_i$. Z definice skládání relací existuje $c \in M$ takové, že $(a,c) \in \bigcap_{i\in I} R_i$ a $(c,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i$. To může nastat jen tehdy, pokud $(a,c) \in R_i$ a $(c,b) \in R_i$ pro každé $i \in I$. Protože $I \neq \emptyset$, existuje $j \in I$ takové, že $(a,c),(c,b) \in R_j$, takže $(a,b) \in R_j \circ R_j \subseteq \mathrm{id}_M$, protože R_j je divná relace. Tedy $a = b$.

Dobře si promyslete, proč jsme v předchozím odstavci potřebovali předpoklad $I \neq \emptyset$.

Uměli byste k libovolné relaci $R \subseteq M \times M$ vytvořit její divný uzávěr? Pokud ano, jak?

e)

Tato definice je vlastně instancí definice pro obecné funkce $f : A \to B$, pokud položíme $A = B = M$.

Protože $M \times M$ není parciální funkce (dokažte!), nesplňuje tato vlastnost první podmínku (vizte výše).

Důkaz toho, že druhá podmínka pro $I \neq \emptyset$ platí je snadný a ponecháváme jej čtenáři.

f) V tomto případě jsou všechny důkazy natolik snadné, že uvedeme pouze správné výsledky a důkazy ponecháme čtenáři.

Skutečně se jedná o totální funkce, i když zde není korespondence tak zřejmá jako v případě parciálních funkcí.

Protože $M \times M$ není totální funkce (dokažte!), nesplňuje tato vlastnost první podmínku (vizte výše).

Tato vlastnost nesplňuje ani druhou podmínku. Protipříkladem jsou množiny $M =$ $= \{a,b\}$, $I = \{1,2\}$ a relace $R_1 = \{(a,b),(b,a)\}$ a $R_2 = \mathrm{id}_M$.

Příklad 3.

Určete reflexivní, symetrický, tranzitivní, reflexivní a tranzitivní, resp. reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr následujících relací. Nestačí jen opsat definice. Podejte přesné charakterizace prvků jednotlivých uzávěrů.

a) $R = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
b) $R = \{(k+2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
c) $R = \{(a,b) \mid b \mid a\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
d) $R = \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
e) $R = \{(a,b) \mid a \leq b + 3\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
f) $R = \{(f,g) \mid \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \subseteq {\mathbb{N}_0}^{\mathbb{N}_0} \times {\mathbb{N}_0}^{\mathbb{N}_0}$
g) Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A\times A}$ je množina všech parciálních funkcí z A do A. $R = \{(f,g) \mid f \cup g \in$ $\in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B?
h) Nechť $\mathcal{F} \subseteq 2^{A\times A}$ je množina všech parciálních funkcí z A do A. $R = \{(f,g) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F} \mid$ $\mid f \cup g \in \mathcal{F}\} \subseteq 2^{A\times A} \times 2^{A\times A}$. Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B?

Řešení

V řešení budeme značit $R_\circ$ reflexivní, $\overleftrightarrow{R}$ symetrický, R^+ tranzitivní, R^* reflexivní a tranzitivní a $\overleftrightarrow{R}^*$ reflexivní, symetrický a tranzitivní obal relace R.

a)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(k,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k,2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(k,2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(2k,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^+ &= \{(k,2^i k) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^* &= \{(k,2^i k) \mid k, i \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \{(2^i k, 2^j k) \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(k,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k+2,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(k+2,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k,k+2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^+ &= \{(k+2i,k) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^* &= \{(k+2i,k) \mid i,k \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \{(k+2i,k+2j) \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a \text{ nebo } a \mid b\} \\
R^+ &= \{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\
R^* &= \{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k,k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(k,k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k^2,k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^+ &= \{(k,k^{2^i}) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\
R^* &= \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k,k^{2^i}) \mid i,k \in \mathbb{N}_0\} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k^{2^i},k^{2^j}) \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \leq b+3\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\
R^+ &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\
R^* &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(f,f) \mid f \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0}\} \cup \\
&\quad \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \cup \\
&\quad \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : f(x+1) = g(x)\} \\
R^+ &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x)\} \\
R^* &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists\, k \in \mathbb{N}_0\ \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x)\} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{N}_0{}^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists\, k,l \in \mathbb{N}_0\ \forall\, x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x+l)\}
\end{aligned}$$

g) Nenechte se zastrašit složitými konstrukcemi. Tento příklad je velmi jednoduchý.

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\
R^+ &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\
R^* &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \mathcal{F} \times \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B, na výsledcích by se nic nezměnilo.

h)

$$\begin{aligned}
R_\circ &= \{(R,R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \{(f,g) \mid f,g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\
\overleftrightarrow{R} &= \{(f,g) \mid f,g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\
R^+ &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\
R^* &= \{(R,R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\
\overleftrightarrow{R}^* &= \{(R,R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \mathcal{F} \times \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali obecné parciální funkce z A do B, na výsledcích by se nic nezměnilo.

Příklad 4.

Dokažte, nebo uveďte protipříklad pro následující tvrzení.

a) Jestliže R, S jsou uspořádání na M, potom také $R \circ S$ je uspořádání na M.

b) Jestliže R je uspořádání na M, potom také $R^{-1} \cap R$ je uspořádání na M.

Řešení

a) Tvrzení neplatí. Jako protipříklad uvažme $M = \{a,b,c,d\}$, $S = \mathrm{id}_M \cup \{(a,b),(c,d)\}$, $R = \mathrm{id}_M \cup \{(b,c),(d,a)\}$. Potom $(a,c),(c,a) \in R \circ S$, takže $R \circ S$ není antisymetrická relace.

b) Tvrzení platí. Nechť $x \in M$. Jelikož R je reflexivní, platí $(x,x) \in R$, tedy také $(x,x) \in R^{-1}$. Proto $(x,x) \in R^{-1} \cap R$ a tudíž $R^{-1} \cap R$ je reflexivní.

Nechť $(x,y),(y,x) \in R^{-1} \cap R$. Pak $(x,y),(y,x) \in R$, a protože R je antisymetrická, platí $x = y$ (což bylo dokázat).

Nechť $(x,y),(y,z) \in R^{-1} \cap R$. Pak $(x,y),(y,z) \in R^{-1}$ a $(x,y),(y,z) \in R$. Z tranzitivity R dostáváme, že $(x,z) \in R$. Jelikož $(x,y),(y,z) \in R^{-1}$, platí $(y,x),(z,y) \in R$ a proto $(z,x) \in R$ (opět z tranzitivity R). Celkem $(x,z),(z,x) \in R$, tedy $(x,z) \in R^{-1} \cap R$ (což bylo dokázat).