IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 8 — Zadání

Téma

Vhodně definované vlastnosti relací, uzávěry relací. Výroky. Výroková logika, valuace, normální tvar výrokových formulí, negace výrokových formulí, pravdivost a splnitelnost výrokových formulí. Predikátová logika, negace formulí predikátové logiky.

Příklad 1.

a) Určete reflexivní uzávěr relace $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
b) Určete symetrický uzávěr relace $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
c) Určete tranzitivní uzávěr relace $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
d) Určete reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr relace $\{(x, y) \mid xy = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
e) Určete reflexivní uzávěr relace $\{(2i + 1, 2i + 3) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
f) Určete symetrický uzávěr relace $\{(2i + 1, 2i + 3) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
g) Určete tranzitivní uzávěr relace $\{(2i + 1, 2i + 3) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
h) Určete reflexivní, symetrický a tranzitivní úzávěr relace $\{(2i + 1, 2i + 3) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
i) Nechť $R = \{(x, y) \mid x \le 2y \wedge y \le 2x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Určete $R \circ R$.

Příklad 2.

Nechť A, B, C, D jsou atomické propozice. Nechť ν je valuace, která splňuje $\nu(A) = \nu(B) = \text{true}$ a $\nu(C) = \nu(D) = \text{false}$. Podle definice S_ν určete $S_\nu(\varphi)$, je-li
a) $\varphi \equiv (C \vee D) \Rightarrow \neg(D \wedge (A \Rightarrow B))$
b) $\varphi \equiv (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow \neg\neg A$
c) $\varphi \equiv (\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \iff \neg B)) \wedge ((D \Rightarrow B) \vee (\neg B \Rightarrow C))$

Příklad 3.

Nechť A, B, C, D jsou atomické propozice. Znegujte následující formule. (Protože znegováním se myslí i převedení do normálního tvaru, máte za úkol pro formuli φ vypočítat $\mathcal{F}(\neg\varphi)$ pomocí příslušných funkcí $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ definovaných na přednášce.)
a) $\varphi \equiv (C \vee D) \Rightarrow \neg(D \wedge (A \Rightarrow B))$
b) $\varphi \equiv (\neg C \Rightarrow \neg(\neg A \iff \neg B)) \wedge ((D \Rightarrow B) \vee (\neg B \Rightarrow C))$
c) $\forall x \in \mathbb{N}_0.\ x > 0 \Rightarrow \exists y, z \in \mathbb{N}_0.\ y \mid x \wedge z \mid x \Rightarrow \exists w \in \mathbb{N}_0.\ w > x \wedge z \mid w \wedge y \mid w$

Příklad 4.

Formalizujte (tj. zapište jako formule výrokové, resp. predikátové logiky) a negujte následující tvrzení. Pokud se tvrzení týká čísel, vyjádřete vlastnosti pomocí aritmetických operací. Formule zapisujte v normálním tvaru.
a) Když budu hodný, Ježíšek mi nadělí hezké dárky.
b) Ne každý čaj mi chutná.
c) Rostlina, která u mne přežije rok, je plevel.
d) Když je přes den zataženo a v noci jasno, bude ráno mrznout nebo přijde obleva.

e) Nechť n je sudé přirozené číslo. Potom pro každé přirozené číslo m platí, že když m je sudé, potom $m+n$ je sudé, a když m je liché, potom $m+n$ je liché.

f) Přirozené číslo p je *prvočíslo*, jestliže není dělitelné jiným přirozeným číslem kromě čísla 1 a sebe samého.

g) Když je přirozené číslo a větší než 8, nebo když je dělitelné přirozeným číslem b, potom a je větší než b a $a \cdot b$ je větší než b.

Příklad 5.

V následujících příkladech máte za úkol znegovat definiční podmínky různých pojmů. Definice pojmů zapište jako formule výrokové, resp. predikátové logiky a znegujte je.

a) Nechť n je přirozené číslo. Co znamená, že n není liché?

b) Nechť R je relace. Co znamená, že R není antisymetrická?

c) Nechť $f \subseteq A \times B$ je parciální funkce. Co znamená, že f není minimální prvek uspořádané množiny $(\mathcal{F}, \subseteq)$, kde $\mathcal{F}$ je množina všech parciálních funkcí z A do B?

d) Nechť $f \subseteq A \times B$ je parciální funkce. Co znamená, že f není nejmenší prvek uspořádané množiny $(\mathcal{F}, \subseteq)$, kde $\mathcal{F}$ je množina všech parciálních funkcí z A do B?

e) Řekneme, že přirozené číslo m je *šťastné a veselé*, jestliže pro žádné přirozené číslo n větší než m neplatí, že m dělí n a $m+n$ je liché. Co znamená, že číslo m není šťastné a veselé?

f) Řekneme, že přirozené číslo k je *odvážné*, jestliže existují přirozená čísla a, b taková, že a i b je různé od čísla 1 a zároveň $k^2 = a^2b^2$. Co znamená, že číslo k není odvážné?

g) Nechť $R \subseteq M \times M$ je binární relace na množině M. Řekneme, že relace R je *přitažlivá*, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí: pokud $(x, y) \in R$, potom existuje $z \in M$ takové, že $(x, z) \in R$ a $(y, z) \in R$. Co znamená, že relace $R \subseteq M \times M$ není přitažlivá?

h) Nechť $f : M \to M$ je funkce. Řekneme, že f *má trojúhelník*, jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \neq x$ a existují navzájem různá $x_1, x_2, x_3 \in M$ taková, že $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ a $f(x_3) = x_1$. Co znamená, že funkce $f : M \to M$ nemá trojúhelník?

Příklad 6.

Mějme výrokovou formuli $\varphi \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

a) Najděte všechny valuace ν, pro něž $S_\nu(\varphi) = \text{true}$. Kolik jich je?

b) Najděte všechny valuace ν, pro něž $S_\nu(\varphi) = \text{false}$. Kolik jich je?

Příklad 7.

Rozhodněte, zda následující formule výrokové logiky jsou splnitelné. Pokud ano, nalezněte valuaci, která to dosvědčuje.

a) $(((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \wedge A) \wedge \neg C$

b) $(D \iff (\neg E \vee D)) \wedge \neg((D \wedge E) \Rightarrow A)$

c) $(\neg\neg B \wedge A) \iff ((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow A))$

Příklad 8.

Označme $\mathcal{V}$ množinu všech valuací. Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{U}, \subseteq)$, kde $\mathcal{U} = \{f \subseteq At \times \{\text{true}, \text{false}\} \mid f \text{ je parciální funkce}\}$ (jedná se opět o množinu parciálních funkcí uspořádaných množinovou inkluzí).

a) Dokažte, že platí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

b) Charakterizujte valuace v pojmech uspořádané množiny $(\mathcal{U}, \subseteq)$ a dokažte, že je podaná charakterizace správná.

c) V uspořádané množině $(\mathcal{U}, \subseteq)$ určete všechny maximální dolní závory množiny $\{\nu \in \in \mathcal{V} \mid S_\nu(B \wedge (C \Rightarrow A)) = \text{true}\}$. Jsou to valuace?

d) Co musí splňovat výroková formule ψ, aby v uspořádané množině $(\mathcal{U}, \subseteq)$ měla množina $\{f \in \mathcal{U} \mid \exists \nu \in \mathcal{V}. f \subseteq \nu \wedge S_\nu(\psi) = \text{true}\}$ infimum? Bude infimum valuace?

Příklad 9.

Nechť pro $i \in \mathbb{N}$ je $A_i \in At$ atomická propozice. Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ definujme formule φ_n takto:

- $\varphi_0 \equiv \text{true}$
- $\varphi_{n+1} \equiv \varphi_n \wedge A_n$

(Tedy například $\varphi_3 \equiv ((\text{true} \wedge \mathrm{A}_1) \wedge \mathrm{A}_2) \wedge \mathrm{A}_3$, přičemž na uzávorkování zřejmě nezáleží.)

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezněte valuaci ν_n takovou, že

$$S_{\nu_n}(\varphi_i) = \begin{cases} \text{true} & \text{pro } i \leq n \\ \text{false} & \text{jinak} \end{cases}$$

b) Nalezněte valuaci μ takovou, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platilo $S_\mu(\varphi_n) = \text{false}$.

c) Nalezněte valuace η takovou, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platilo $S_\eta(\varphi_n) = \text{true}$.