IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 9 — Zadání

Téma

Induktivně definované množiny, jednoznačné induktivní definice, induktivně definované funkce z induktivně definovaných množin. Strukturální indukce.

Příklad 1.

Nechť $M \subseteq \mathbb{N}_0$ je induktivně definována takto:

- $0 \in M$
- jestliže $x \in M$, potom $x + 4 \in M$

a) Zapište formálně funkce induktivních pravidel této definice.
b) Platí $129 \in M$? Platí $65 \in M$?
c) Množinu M zapište explicitně, tj. ve tvaru $M = \{\ldots\}$.
d) Je tato definice jednoznačná? Svou odpověď zdůvodněte.

Příklad 2.

Nechť $M \subseteq \mathbb{N}_0$ je induktivně definována takto:

- $0 \in M$
- jestliže $x \in M$, potom $x + 3 \in M$ a $x + 5 \in M$
- jestliže $x, y \in M$, potom $xy \in M$

a) Zapište formálně funkce induktivních pravidel této definice.
b) Platí $127 \in M$? Platí $17 \in M$?
c) Množinu M zapište explicitně, tj. ve tvaru $M = \{\ldots\}$.
d) Je tato definice jednoznačná? Svou odpověď dokažte.
e) Rozhodněte zda platí tvrzení

$$\exists m \in \mathbb{N}_0.\ \forall n \in \mathbb{N}_0.\ m \leq n \Rightarrow n \in M$$

a správnost svého rozhodnutí dokažte.

Příklad 3.

Uvažujme induktivně definovanou množinu $M \subseteq \mathbb{N}_0$

- $0 \in M$, $1 \in M$
- jestliže $x \in M$, potom $2x \in M$

Tato induktivní definice je zřejmě jednoznačná, takže funkce $f : M \to \mathbb{N}_0$ je korektně určena následující induktivní definicí

- $f(0) = \perp$, $f(1) = 0$
- $f(2x) = f(x) + 1$

a) Ukažte všechny kroky výpočtu hodnoty $f(256)$ podle této induktivní definice.
b) Ukažte všechny kroky výpočtu hodnoty $f(192)$ podle této induktivní definice.

c) Množinu M zapište explicitně.
d) S využitím explicitního vyjádření prvků množiny M zapište explicitně i funkci f, tj. pro každé $n \in M$ stanovte hodnotu $f(n)$.

Příklad 4.

Množinu $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ definujme následující induktivní definicí:

- $0 \in \mathbb{N}_0$
- jestliže $n \in \mathbb{N}_0$, potom $n + 1 \in \mathbb{N}_0$

Induktivně definujte funkce
a) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(n) = n + 3$
b) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(n) = n^2 + 3n + 1$
c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^{n+1} - 1$
d) $f : \mathbb{N}_0 \to \{\text{sudé}, \text{liché}\}$

$$f(n) = \begin{cases} \text{sudé} & \text{pokud } n \text{ je sudé} \\ \text{liché} & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad 5.

Mějme množinu (abecedu) $\Sigma = \{a\}$. Konečným posloupnostem prvků (znaků) Σ budeme pro stručnost říkat slova nad abecedou Σ. Prázdnou posloupnost (prázdné slovo, slovo délky 0) budeme značit ε. Uvědomte si, že ε je metasymbol, zejména $\varepsilon \notin \Sigma$. Množinu $\Sigma^* \subseteq \Sigma^*$ všech slov nad abecedou Σ definujme induktivně takto:

- $\varepsilon \in \Sigma^*$
- jestliže $w \in \Sigma^*$, potom $wa \in \Sigma^*$.

Tato definice je jednoznačná. Všimněte si podobnosti této definice s induktivní definicí množiny přirozených čísel. Induktivně definujme funkci $l : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$, která bude počítat délku slova nad abecedou Σ.

- $l(\varepsilon) = 0$
- $l(wa) = l(w) + 1$

Uvažujme funkci $S : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definovanou induktivně takto:

- $S(\varepsilon) = a$
- $S(wa) = S(w).aaa$

Nechť $w \in \Sigma^*$. Pomocí funkce l charakterizujte, co počítá funkce S, tj. stanovte, co musí splňovat $u, v \in \Sigma^*$, aby platilo $S(u) = v$ a své tvrzení dokažte (strukturální indukcí).

Příklad 6.

Nechť Σ je konečná množina symbolů.
a) Podejte jednoznačnou induktivní definici množiny Σ^* všech konečných posloupností symbolů z množiny Σ.
b) Nechť $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Definujte induktivně množinu všech slov nad abecedou Σ, která obsahují podslovo w_1 nebo w_2. Strukturální indukcí dokažte, že je definice správně.

c) S využitím jednoznačné induktivní definice množiny Σ^* z předchozí části tohoto příkladu pro každé $a \in \Sigma$ induktivně definujte funkci $\#_a : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$, která pro každé slovo $w \in \Sigma^*$ vrátí počet symbolů a ve slově w. Strukturální indukcí dokažte, že je funkce definována správně.

Příklad 7.

Nechť $\Sigma = \{a, b, c\}$. Uvažujme množinu $M \subseteq \Sigma^*$ danou následující induktivní definicí

- $ba, bc, cb, ab \in M$
- jestliže $x, y \in M$ a $x = au$ a $y = va$ pro nějaká $u, v \in \Sigma^*$, potom $xy \in M$
- jestliže $x, y \in M$ a $x = ub$ a $y = bv$ pro nějaká $u, v \in \Sigma^*$, potom $xy \in M$

a) Rozhodněte, zda $abbacbba \in M$, $cbbccbba \in M$, $abbccbba \in M$, $abbabccbabba \in M$. Svá tvrzení zdůvodněte.

b) Reverzí slova $w \in \Sigma^*$, $w = a_1 \dots a_n$, kde $a_i \in \Sigma$ pro každé $i = 1, \dots, n$, rozumíme slovo $w^R = a_n \dots a_1$. Například reverzí slova *abbc* je slovo *cbba*.
Strukturální indukcí dokažte, že pro každé $w \in M$ platí $w^R \in M$, tj. že množina M je uzavřená na reverzi slov.

Příklad 8.

Nechť M je množina. Nechť $X, Y \subseteq M$ jsou induktivně definované množiny se společnou množinou $B \subseteq M$ bázových prvků, přičemž $f_1, \dots, f_m$ jsou funkce induktivních pravidel z definice X a $g_1, \dots, g_n$ jsou funkce induktivních pravidel z definice Y.
Nechť má induktivně definovaná množina $Z_1 \subseteq M$ množinu bázových prvků X a funkce induktivních pravidel $g_1, \dots, g_n$.
Nechť má induktivně definovaná množina $Z_2 \subseteq M$ množinu bázových prvků Y a funkce induktivních pravidel $f_1, \dots, f_m$.
Rozhodněte, zda platí $Z_1 = Z_2$ a své tvrzení dokažte.

Příklad 9.

Nechť M je množina. Nechť $X, Y \subseteq M$ jsou *jednoznačně* induktivně definované množiny. Nechť $B_X \subseteq M$ je množina bázových prvků definice X a nechť $B_Y \subseteq M$ je množina bázových prvků definice Y. Nechť definice X a Y mají společné funkce induktivních pravidel $f_1, \dots, f_n$.
Nechť má induktivně definovaná množina $S \subseteq M$ množinu bázových prvků $B_X \cap B_Y$ a funkce induktivních pravidel $f_1, \dots, f_n$.
Nechť má induktivně definovaná množina $T \subseteq M$ množinu bázových prvků $B_X \cup B_Y$ a funkce induktivních pravidel $f_1, \dots, f_n$.

a) Rozhodněte, zda je množina S definována jednoznačně. Své tvrzení dokažte.

b) Rozhodněte, zda je množina T definována jednoznačně. Své tvrzení dokažte.

c) Rozhodněte, zda platí $S = X \cap Y$ a své tvrzení dokažte. Co můžeme na základě tohoto výsledku říct o případě, v němž bychom nepožadovali, aby definice množin X a Y byly jednoznačné?

d) Rozhodněte, zda platí $T = X \cup Y$ a své tvrzení dokažte. Co můžeme na základě tohoto výsledku říct o případě, v němž bychom nepožadovali, aby definice množin X a Y byly jednoznačné?

Příklad 10.

V závěrečném příkladě této sady se seznámíte s obecnějším pojetím induktivních definic, kdy je navzájem provázána definice více množin, resp. funkcí. U funkcí jste se s tím už v omezené míře setkali. Definice funkcí $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, které převádějí logické formule do normálního tvaru, jsou také provázány, ale obě funkce mají stejný definiční obor.
Nechť jsou množiny $A, B, C \subseteq \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{(}, \texttt{)}, \texttt{*}, \texttt{+}\}^*$ definovány induktivně takto (všimněte si typografického vyznačení, že se jedná o symboly, z nichž budeme vytvářet slova, nikoliv o čísla a operace s nimi):

- $\{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}\} \subseteq A$
- jestliže $t \in C$, potom $\texttt{(}t\texttt{)} \in A$
- $A \subseteq B$
- jestliže $x \in B$ a $y \in A$, potom $x\texttt{*}y \in B$
- $B \subseteq C$
- jestliže $x \in B$ a $y \in C$, potom $x\texttt{+}y \in C$

Nechť $X = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{T}, \texttt{P}\}$. Nechť $u, v \in X^*$. Zřetězení slov u a v budeme značit $u \,.\, v$, pokud by zápis uv vedl k nejasnostem. Uvažme funkce $M_A : A \to X^*$, $M_B : B \to X^*$ a $M_C : C \to X^*$ definované induktivně takto:

- $M_A(k) = k$ pro $k \in \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}\}$
- $M_A(\texttt{(}t\texttt{)}) = M_C(t)$
- $M_B(t) = M_A(t)$ pro $t \in A$
- $M_B(x\texttt{*}y) = M_B(x) \,.\, M_A(y) \,.\, \texttt{T}$
- $M_C(t) = M_B(t)$ pro $t \in B$
- $M_C(x\texttt{+}y) = M_B(x) \,.\, M(C) \,.\, \texttt{P}$

a) Rozhodněte, zda platí `8+9` $\in C$, `(8+9)` $\in C$, `4+15+0` $\in C$, `3+2` $\in A$, `(3+2+4*7)` $\in A$, `3*(2+2)` $\in B$, `3*2+2` $\in B$, `(3*2)+2` $\in B$, `3*2+2` $\in C$.
b) Ukažte všechny kroky výpočtu M_C(`1+2+3+4*5*6*7*8`).
c) Ukažte všechny kroky výpočtu M_C(`1*(2+3*4+5*6)*7+8*9`).
d) Umíte říct, co je množina C a co počítá funkce M_C?