Výroková logika - cvičení

1 Aplikace věty o kompaktnosti

1.1 Příklad:

Nechť A, B jsou nejvýše spočetné soubory a $R \subseteq A \times B$ je relace taková, že pro každé $a \in A$ je soubor $B_a = \{b \mid (a,b) \in R\}$ neprázdný a konečný.

Dokažte, že pokud pro každou konečnou část $A_0 \subseteq A$ existuje injektivní funkce $f_{A_0} : A_0 \to B$ taková, že $f_{A_0} \subseteq R$ (zde funkci f_{A_0} chápeme jako relaci), pak existuje také injektivní funkce $f : A \to B$ taková, že $f \subseteq R$.

Poznámka: Trojici (A, B, R) lze chápat jako bipartitní graf a injektivní funkce f_{A_0} a f jako párování v grafu (A, B, R).

Řešení:

Nechť P_{ab} je výroková proměnná pro každou dvojici $(a,b) \in A \times B$. Definujme soubor T tvořený následujícími formulemi:

- $\bigvee_{b \in B_a} P_{ab}$ pro každé $a \in A$
- $\neg P_{ab_1} \vee \neg P_{ab_2}$ pro každé $a \in A$ a všechna $b_1, b_2 \in B$ taková, že $b_1 \neq b_2$
- $\neg P_{a_1b} \vee \neg P_{a_2b}$ pro všechna $a_1, a_2 \in A$ taková, že $a_1 \neq a_2$ a každé $b \in B$

Nyní postupně ukážeme následující dvě tvrzení, která nám dohromady dají požadovaný výsledek:

Tvrzení:

1. Pokud pro každou konečnou část $A_0 \subseteq A$ existuje injektivní funkce $f_{A_0} : A_0 \to B$ taková, že $f_{A_0} \subseteq R$, pak je soubor T splnitelný.
2. Pokud je soubor T splnitelný, pak existuje injektivní funkce $f : A \to B$ taková, že $f \subseteq R$.

ad 1. Ukážeme, že libovolný konečný soubor formulí $T_0 \subseteq T$ je splnitelný. Požadované tvrzení pak obdržíme aplikací věty o kompaktnosti. Nechť $P_{a_1b_1}, \ldots, P_{a_kb_k}$ jsou právě ty výrokové proměnné, které se vyskytují ve formulích z T_0. Označme $A_0 = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Z předpokladu dokazovaného tvrzení víme, že existuje injektivní funkce $f_{A_0} : A_0 \to B$ taková, že $f_{A_0} \subseteq R$.

Definujme valuaci ν takto: Pro každé $(a,b) \in A \times B$ definujeme $\nu(P_{ab}) = 1$ právě tehdy, když $a \in A_0$ a $b = f_{A_0}(a)$ a dále definujeme $\nu(Q) = 0$ pro ostatní výrokové proměnné Q.

Dokážeme, že každá formule $\varphi \in T_0$ je pravdivá ve valuaci ν.

- Předpokládejme, že φ je tvaru $\bigvee_{b \in B_a} P_{ab}$ pro nějaké $a \in A$. Pak zřejmě $a \in A_0$ a tedy existuje $b \in B$ takové, že $b = f_{A_0}(a)$ a $b \in B_a$ (protože $f_{A_0} \subseteq R$). Z definice valuace ν obdržíme, že $\nu(P_{ab}) = 1$ a tedy $\nu(\varphi) = 1$.
- Pokud φ je tvaru $\neg P_{ab_1} \vee \neg P_{ab_2}$ pro nějaké $a \in A$ a $b_1, b_2 \in B$, pak platí buď $b_1 \neq f_{A_0}(a)$ nebo $b_2 \neq f_{A_0}(a)$, protože $b_1 \neq b_2$. Z definice valuace ν potom plyne, že buď $\nu(P_{ab_1}) = 0$ nebo $\nu(P_{ab_2}) = 0$ a tedy $\nu(\varphi) = 1$.
- Pokud φ je tvaru $\neg P_{a_1 b} \vee \neg P_{a_2 b}$ pro nějaká $a_1, a_2 \in A$ a $b \in B$, pak platí buď $b \neq f_{A_0}(a_1)$ nebo $b \neq f_{A_0}(a_2)$, protože f_{A_0} je injektivní a $a_1 \neq a_2$. Z definice valuace ν potom plyne, že buď $\nu(P_{a_1 b}) = 0$ nebo $\nu(P_{a_2 b}) = 0$ a tedy $\nu(\varphi) = 1$.

Proto je libovolný konečný soubor $T_0 \subseteq T$ splnitelný, a tedy i soubor T je splnitelný dle věty o kompaktnosti.

ad 2. Nechť ν je valuace, při které jsou všechny formule z T pravdivé. Nechť $f \subseteq A \times B$ je relace, definovaná takto: $(a, b) \in f$ právě tehdy, když $(a, b) \in R$ a $\nu(P_{ab}) = 1$. Ukážeme, že f je injektivní funkce.

Nechť $a \in A$. Protože $\nu(\bigvee_{b \in B_a} P_{ab}) = 1$ a $B_a \neq \emptyset$, dostaneme, že $(a, b) \in f$ pro nějaké $b \in B_a$. Protože navíc $\nu(\neg P_{ab_1} \vee \neg P_{ab_2}) = 1$ pro libovolná $b_1, b_2 \in B$ taková, že $b_1 \neq b_2$, dostaneme, že $(a, b) \in f$ pro právě jedno $b \in B$ a tedy f je funkce.

Nyní předpokládejme, že $f(a_1) = f(a_2) = b$ pro nějaká $a_1, a_2 \in A$ taková, že $a_1 \neq a_2$ a nějaké $b \in B$. Protože $\nu(\neg P_{a_1 b} \vee \neg P_{a_2 b}) = 1$, dostaneme, že buď $(a_1, b) \notin f$ nebo $(a_2, b) \notin f$, což je spor.

Relace f je tedy injektivní funkce, což bylo dokázat.

Kombinací výše uvedených tvrzení 1. a 2. obdržíme řešení příkladu.

2 Shefferovské funkce

2.1 Příklad:

Dokažte následující tvrzení: Výroková funkce F arity $n \geq 1$ je Shefferovská právě tehdy, když platí následující podmínky:

1. $\mathcal{F}(P, \ldots, P) \approx \neg P$ (P je výroková proměnná)
2. pro nějaká $x_1, \ldots, x_n \in \{P, Q\}$ (P, Q jsou různé výrokové proměnné) platí, že $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ *není* ekvivalentní ani $\neg P$ ani $\neg Q$

3 Řešení:

Důkaz: <=: Předpokládejme platnost podmínek 1. a 2. a nechť $x_1, \ldots, x_n \in \{P, Q\}$ jsou taková, že $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ není ekvivalentní ani $\neg P$ ani $\neg Q$.

Idea: Následující pravdivostní tabulka ukazuje, jakých pravdivostních hodnot může nabývat formule $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$.

P	Q	$\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$	$\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Z tabulky je zřejmé, že máme pouze dvě možnosti. Ostatní možnosti jsou vyloučeny podmínkami 1. a 2. V prvním prípadě se symbol $\mathcal{F}$ chová jako spojka $\curlywedge$ (NOR) a ve druhém případě jako $|$ (NAND). Obě tyto spojky jsou Shefferovské, což nám dá požadovaný výsledek.

Formální důkaz: Pro $x, y \in \{0, 1\}$ označme $u^{xy} = (u_1^{xy}, \ldots, u_n^{xy}) \in \{0, 1\}^n$ vektor délky n definovaný takto:

$$u_i^{xy} = \begin{cases} x & \text{pokud } x_i = P \\ y & \text{pokud } x_i = Q \end{cases}$$

Pozorování:

(a) $F(u^{00}) = 1$ a $F(u^{11}) = 0$ (plyne přímo z podmínky 1.)

(b) Jestliže $F(u^{10}) = 0$ a $F(u^{01}) = 1$, pak by $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) \approx \neg P$

(c) Jestliže $F(u^{10}) = 1$ a $F(u^{01}) = 0$, pak by $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) \approx \neg Q$

Tudíž možnosti (b) a (c) by byly v rozporu s naším předpokladem. Z toho plyne, že nám zbývají pouze dvě možnosti, jak se může funkce F chovat na vektorech u^{xy}. Tyto možnosti jsou

i. $F(u^{10}) = F(u^{01}) = 0$

ii. $F(u^{10}) = F(u^{01}) = 1$

ad i. Předpokládejme, že $F(u^{10}) = F(u^{01}) = 0$. Definujme transformaci $T : \mathcal{L}(\curlywedge) \to \mathcal{L}(F)$, která bude nahrazovat spojku $\curlywedge$ spojkou $\mathcal{F}$ takto: $T(R) = R$ pro libovolnou výrokovou proměnnou R a $T(\varphi \curlywedge \psi) = \mathcal{F}(T(\psi_1), \ldots, T(\psi_n))$ kde

$$\psi_i = \begin{cases} \varphi & \text{pokud } x_i = P \\ \psi & \text{pokud } x_i = Q \end{cases}$$

Ukážeme, že pro libovolnou formuli $\tau \in \mathcal{L}(\curlywedge)$ platí $\tau \approx T(\tau)$. Důkaz povedeme indukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti pro τ.

Pokud τ je výroková proměná, pak $T(\tau) = \tau$ a tvrzení platí triviálně. Předpokládejme, že τ je tvaru $\varphi \curlywedge \psi$ a nechť ν_{xy} (kde $x, y \in \{0, 1\}$) je nějaká valuace taková, že $\nu_{xy}(\varphi) = x$ a $\nu_{xy}(\psi) = y$. Pak

$$\nu_{xy}(T(\varphi \curlywedge \psi)) = \nu_{xy}(\mathcal{F}(T(\psi_1), \ldots, T(\psi_n))) =$$
$$F(\nu_{xy}(T(\psi_1)), \ldots, \nu_{xy}(T(\psi_n))) = F(u^{xy}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

kde třetí rovnost plyne z indukčního předpokladu. Z definice spojky $\curlywedge$ plyne, že

$$\nu_{xy}(\varphi \curlywedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a tedy skutečně $T(\varphi \curlywedge \psi) \approx \varphi \curlywedge \psi$.

Nyní nechť G je libovolná výroková funkce. Z přednášky víme, že existuje formule $\tau \in \mathcal{L}(\curlywedge)$ taková, že $F_\tau = G$ (kde F_τ je funkce definovaná formulí τ, viz. definice 19. z přednášky). Víme však, že $F_\tau = F_{T(\tau)}$, protože $\tau \approx T(\tau)$, a tedy že $F_{T(\tau)} = G$ kde $T(\tau) \in \mathcal{L}(F)$.

ad ii. Pokud $F(u^{10}) = F(u^{01}) = 1$ pak se podobně jako v předchozím případě zadefinuje transformace $T : \mathcal{L}(|) \to \mathcal{L}(F)$ taková, že platí $\tau \approx T(\tau)$. Víme, že pro libovolnou výrokovou funkci G existuje formule $\tau \in \mathcal{L}(|)$ taková, že $F_\tau = G$ a tedy $F_{T(\tau)} = F_\tau = G$.

=>: Důkaz provedeme obměnou. Předpokládejme nejprve, že neplatí podmínka 1. ze zadání příkladu. Máme celkem tři možnosti.

(a) $F(1, \ldots, 1) = 1$ a $F(0, \ldots, 0) = 0$

(b) $F(1, \ldots, 1) = 1$ a $F(0, \ldots, 0) = 1$

(c) $F(1, \ldots, 1) = 0$ a $F(0, \ldots, 0) = 0$

Následující tvrzení ukazuje, že ani v jednom z výše uvedených případů, nemůže být funkce F Shefferovská.

Tvrzení: Nechť φ je formule $\mathcal{L}(F)$ obsahující právě jednu výrokovou proměnnou P.

(a) Jestliže $F(1, \ldots, 1) = 1$ a $F(0, \ldots, 0) = 0$ pak $F_\varphi(1) = 1$

(b) Jestliže $F(1, \ldots, 1) = 1$ a $F(0, \ldots, 0) = 1$ pak $F_\varphi(1) = 1$

(c) Jestliže $F(1, \ldots, 1) = 0$ a $F(0, \ldots, 0) = 0$ pak $F_\varphi(0) = 0$

Důkaz: ad (a): Indukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti pro φ.

- Jestliže φ je výroková proměnná P a ν je valuace taková, že $\nu(P) = 1$ a $\nu(Y) = 0$ pro ostatní výrokové proměnné Y, pak zřejmě $F_\varphi(1) = \nu(\varphi) = \nu(P) = 1$.

- Jestliže φ je tvaru $\mathcal{F}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ pro nějaké formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ a ν je valuace taková, že $\nu(P) = 1$ a $\nu(Y) = 0$ pro ostatní výrokové proměnné Y, pak z indukčního předpokladu plyne, že $\nu(\psi_i) = 1$ pro $1 \leq i \leq n$ a tedy

$$F_\varphi(1) = \nu(\mathcal{F}(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = F(\nu(\psi_1), \ldots, \nu(\psi_n)) = F(1, \ldots, 1) = 1$$

Body (b) a (c) se dokáží úplně stejně.

Z výše uvedeného tvrzení tedy plyne, že pokud není splněna podmínka 1. ze zadání, pak funkce F není Shefferovská.

Nyní předpokládejme, že podmínka 1. je splněna, ale není splněna podmínka 2. Dokážeme, že pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}(F)$ s právě jednou výrokovou proměnnou P platí buď $\varphi \approx P$ nebo $\varphi \approx \neg P$. Důkaz povedeme indukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti pro φ.

- Jestliže φ je výroková proměnná P, pak zřejmě $\varphi \approx P$.

- Jestliže φ je tvaru $\mathcal{F}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, pak z indukčního předpokladu plyne, že buď $\psi_i \approx P$ nebo $\psi_i \approx \neg P$ pro $1 \leq i \leq n$. Pak (viz. cvičení 1.) $\varphi \approx \mathcal{F}(\tilde{P}_1, \ldots \tilde{P}_n)$ kde

$$\tilde{P}_i = \begin{cases} P & \text{pokud } \psi_i \approx P \\ \neg P & \text{pokud } \psi_i \approx \neg P \end{cases}$$

Nyní uvažme $\neg P$ za Q v podmínce 2. ze zadání příkladu. Protože předpokládáme, že podmínka 2. *není* splněna, dostaneme, že buď $\varphi \approx \mathcal{F}(\tilde{P}_1, \ldots \tilde{P}_n) \approx \neg P$ nebo $\varphi \approx \mathcal{F}(\tilde{P}_1, \ldots \tilde{P}_n) \approx \neg(\neg P) \approx P$.

Z výše uvedeného plyne, že neexistuje formule $\varphi \in \mathcal{L}(F)$ taková, že $F_\varphi(1) = 1$ a $F_\varphi(0) = 1$ a tudíž F není Shefferovská.

Cvičení:

1. Nechť $\mathcal{F}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ a $\mathcal{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ jsou formule formálního logického systému $\mathcal{L}(F)$ takové, že $\psi_i \approx \varphi_i$ pro $1 \leq i \leq n$. Dokažte, že $\mathcal{F}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \approx \mathcal{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

2. Nechť $\varphi, \psi, \xi_1, \xi_2$ jsou formule formálního logického systému $\mathcal{L}(F_1, \ldots, F_n)$ takové, že vytvořující posloupnost formule ψ obdržíme z vytvořující posloupnosti formule φ nahrazením všech výskytů formule ξ_1 formulí ξ_2 a zároveň $\xi_1 \approx \xi_2$. Dokažte, že $\varphi \approx \psi$.

3. Rozhodněte a dokažte (bez použití Příkladu 2.1!) zda jsou následující formální logické systémy plnohodnotné.
   (a) $\mathcal{L}(\rightarrow)$[1]
   (b) $\mathcal{L}(\leftrightarrow)$
   (c) $\mathcal{L}(\vee, \wedge)$
4. Pokuste se na základě klasifikace z Příkladu 2.1 odvodit vzorec vyjadřující počet n-árních Shefferovských funkcí (viz. přednáška).

[1]Symbol $\rightarrow$ zde zastupuje binární funkci, která udává sémantiku (tj. pravdivostní tabulku) implikace