MB101\ 13 – III. zápočtová písemka

skupina A

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. Vypočtěte determinant matice A:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
(7 bodů)

2. Je dána matice X:
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Vypočtěte matici X^* (tj. matici adjungovanou k matici X) a **pomocí ní** pak spočítejte matici X^{-1}. (6 bodů)

3. Uvažme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3 + 2x_4, 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$.

   a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích a pomocí ní nalezněte nějakou bázi podprostorů $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$. (4 body)

   b) V prostoru $\mathbb{R}^4$ mějme bázi $\alpha = [(1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,1)]$, v prostoru $\mathbb{R}^3$ pak bázi $\beta = [(1,0,-1), (0,-1,1), (1,1,-1)]$. Nalezněte $(f)_{\beta\alpha}$ – matici zobrazení f v bazích α a β. Pomocí ní vypočtěte souřadnice vektoru $f(u)$ v bázi β, jestliže souřadnice vektoru u v bázi α jsou $(1,-2,1,2)^T$. (5 bodů)

   c) V prostoru $\mathbb{R}^4$ dále uvažme bázi
   $$\gamma = [(0,2,1,0), (1,1,0,0), (-1,1,0,0), (0,0,0,1)].$$
   Nalezněte matici $(id)_{\alpha\gamma}$ – matici přechodu od báze γ k bázi α. (Kde α je báze popsaná výše.) (3 body)

MB101\ 13 – III. zápočtová písemka

skupina B

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. Vypočtěte determinant matice B:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (7 bodů)

2. Je dána matice Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Vypočtěte matici Y^* (tj. matici adjungovanou k matici Y) a **pomocí ní** pak spočítejte matici Y^{-1}. (6 bodů)

3. Uvažme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3 + 2x_4, 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$.

   a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích a pomocí ní nalezněte nějakou bázi podprostorů $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$. (4 body)

   b) V prostoru $\mathbb{R}^4$ mějme bázi $\alpha = [(1,0,0,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,1)]$, v prostoru $\mathbb{R}^3$ pak bázi $\beta = [(1,0,-1),(0,-1,1),(1,1,-1)]$. Nalezněte $(f)_{\beta\alpha}$ – matici zobrazení f v bazích α a β. Pomocí ní vypočtěte souřadnice vektoru $f(u)$ v bázi β, jestliže souřadnice vektoru u v bázi α jsou $(1,-2,1,2)^T$. (5 bodů)

   c) V prostoru $\mathbb{R}^4$ dále uvažme bázi

$$\gamma = [(0,2,1,0),(1,1,0,0),(-1,1,0,0),(0,0,0,1)].$$

   Nalezněte matici $(id)_{\alpha\gamma}$ – matici přechodu od báze γ k bázi α. (Kde α je báze popsaná výše.) (3 body)