verze: 4. května 2008

1 Kombinatorika

1.1. Kolik podmnožin lze vytvořit z n-prvkové množiny? [2^n]

1.2. Mám 6 jablek a 3 hrušky, chci udělat salát z pěti kusů ovoce, aby tam byla nejméně jedna hruška. Kolika způsoby to lze udělat? [120]

1.3. V podniku pracuje 18 mužů a 16 žen. Kolika způsoby lze vybrat 7 zaměstnanců tak, aby mezi nimi byli a) 4 muži a 3 ženy, b) 6 mužů a 1 žena, c) aspoň 4 ženy?
[a) 1 713 600, b) 297 024, c) 2 309 008]

1.4. Kolika způsoby lze rozmístit 7 kuliček a 2 kostky do devíti přihrádek? [289 575]

1.5. Rozepište všechny možnosti rozdělení 3 předmětů do 3 přihrádek, uvažujte rozlišitelné i nerozlišitelné předměty i přihrádky.

1.6. Kolik různých pěticiferných čísel s různými číslicemi je možno sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5? [120]

1.7. Na pískovišti si hrají 4 děti, dohromady mají 10 modrých, 15 červených a 8 zelených kuliček. Kolika způsoby si je mohou mezi sebou rozdělit tak, aby každé dítě mělo alespoň jednu kuličku od každé barvy?
[1 070 160]

1.8. Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova ANAPURNA, resp. VEVERKA?
[3 360, resp. 1 260]

1.9. Určete koeficient u členů $x^2y^4z^2$, xy^5z polynomu $P(x) = (2x - 5y + z)^8$. [1 050 000, 0]

1.10. Kolik existuje surjektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na množinu $\{a, b, c\}$? [150]

1.11. Kolika způsoby lze do tří různých obálek rozmístit pět stokorun a pět padesátikorun tak, aby žádná obálka nezůstala prázdná? [336]

1.12. Kolika způsoby můžeme do pěti důlků rozdělit po jedné kouli, máme-li k dispozici 4 bílé, 4 modré a 3 zelené koule? [230]

1.13. Určete počet různých vět, které vzniknou přesmyčkami ve větě "Ema má maso".
[podle "pochopení" zadání: 288, 1 728, 30 240, 10 080]

1.14. Na kolik nejvýše a nejméně částí dělí rovinu n čtverců (obvodů)?
[min: $n + 1$, max: $4n^2 - 4n + 2$]

1.15. Na kolik částí dělí rovinu n přímek v obecné poloze? [$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$]

1.16. Jaký je nejvyšší počet částí, na které je rozdělen (třírozměrný) prostor n rovinami?
[$\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$]

1.17. Určete součet

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$, $[n^2]$,

b) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$. $[2(2^n - 1)]$

1.18. Odvoďte součet pro $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

$[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$

1.19. Určete počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ v $\mathbb{N}$, resp. v $\mathbb{N}_0$.

[56, resp. 220]

1.20. Určete počet čtyřciferných čísel, která mají ciferný součet roven 4.

[20]

1.21. Při dominu si 4 hráči dělí 28 kostek mezi sebou rovným dílem. Kolika způsoby to může být provedeno?

$[\frac{28!}{(7!)^4}]$

1.22. Kolika způsoby lze rozdělit do deseti očíslovaných přihrádek čtyři stejné modré koule a šest stejných bílých koulí, jestliže každá přihrádky musí být obsazena?

[210]

1.23. Kolik (různých) úhlopříček má konvexní n-úhelník?

$[\frac{n(n-3)}{2}]$

1.24. Čtyři děti hrající si na pískovišti našly šest hliněných a čtyři skleněné kuličky. Kolika způsoby si je mohou rozdělit? Jak to dopadne v případě, kdy každé dítě chce mít aspoň jednu kuličku od obou druhů?

[2940, 10]

2 Diferenční rovnice

2.1. Najděte řešení diferenční rovnice $y_{n+2} = 2y_n + n$, které splňuje počáteční podmínky $y_1 = 2, y_2 = 2$.

$[y_n = \frac{5+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2})^n + \frac{-5+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^n - n - 2]$

2.2. Najděte řešení diferenční rovnice $y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n + 1$, které splňuje počáteční podmínky $y_1 = 2$, $y_2 = 2$. $[y_n = \frac{5}{6}2^n - \frac{5}{6}(-1)^n - \frac{1}{2}]$

2.3. Určete posloupnost, která vyhovuje diferenční rovnici $y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n + 1$ s počáteční podmínkou $y_1 = 1$. $[y_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2]$

2.4. Určete posloupnost, která vyhovuje diferenční rovnici $2y_{n+2} = -y_{n+1} + y_n + 2$ s počátečními podmínkami $y_1 = 2$ a $y_2 = 3$. $[y_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n + 1]$

2.5. Určete reálnou bázi prostoru řešení homogenní diferenční rovnice $y_{n+4} = y_{n+3} + y_{n+1} - y_n$.
$[y_n^{[1]} = 1, y_n^{[2]} = n, y_n^{[3]} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right), y_n^{[4]} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)]$

2.6. Nalezněte řešení následující diferenční rovnice $px_{k+2} - x_{k+1} + (1-p)x_k = 0$. Proveďte diskuzi řešení vzhledem k parametru p. $[p = \frac{1}{2} : x_k = c_1 + c_2 n, p \neq \frac{1}{2} : x_k = c_1 + c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n]$

2.7. Najděte řešení diferenční rovnice $x_{k+2} + x_k = 0$. $[x_n = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)]$

2.8. Vyřešte diferenční rovnici: $x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2} = 2n$. $[x_n = c_1 + c_2(-2)^n + \frac{n^2}{3} + \frac{7n}{9}]$

2.9. Určete prostor řešení nehomogenní diferenční rovnice a také prostor řešení příslušné homogenní diferenční rovnice $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + n$. Dále napište explicitně jedinou posloupnost, která řeší nehomogenní rovnice a vyhovuje počátečním podmínkám $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
$[H : \{c_1 2^n + c_2 n 2^n\}, N : \{c_1 2^n + c_2 n 2^n + n + 2\}, PP : \{-\frac{3}{2} 2^n + \frac{1}{2} n 2^n + n + 2\}]$

2.10. Napište podmínky pro parametry a, b, c tak, aby prostor řešení homogenní diferenční rovnice

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

byl prostorem periodických posloupností. [např. $b^2 < 4ac$]

2.11. Najděte řešení následujících rovnic

- $x_{n+1} = 2x_n$ $[x_n = c2^n]$
- $x_{n+1} = 2x_n + 1$ $[x_n = c2^n - 1]$
- $x_{n+1} = -3x_n + 2n$ $[x_n = c(-3)^n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{8}]$
- $x_{n+1} = 4x_n + 4n^2 - 1$ $[x_n = c4^n - \frac{4}{3}n^2 - \frac{8}{9}n - \frac{11}{27}]$
- $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n$, $x_1 = 1$ $[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n]$
- $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + 2$, $x_1 = 2$ $[4\left(\frac{3}{2}\right)^n - 4]$
- $x_{n+2} = -x_{n+1} + 2x_n$ $[x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-2)^n]$
- $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $x_0 = 3, x_1 = 2$ $[x_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot n \cdot 2^n]$
- $x_{n+2} - 2x_{n+1} = -2x_n$
  $[x_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$, nebo $x_n = c_1(\sqrt{2})^n \cos(\frac{n\pi}{4}) + c_2(\sqrt{2})^n \sin(\frac{n\pi}{4})]$
- $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n \cdot n$, $x_0 = 1, x_1 = 2$ $[x_n = 4 - 3 \cdot 2^n + 2^n \cdot n(n-1)]$

3 Pravděpodobnost

3.1 Klasická pravděpodobnost

3.1. Hodíme n-krát po sobě kostkou. Jaká je pst, že alespoň jedenkrát padne šestka? $[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n]$

3.2. Určete nejvyšší možný počet hodů n z předchozího příkladu tak, aby pst, že nepadne šestka, byla větší než pst, že šestka padne alespoň jednou. [3]

3.3. V urně je 10 koulí – 7 bílých a 3 černé. Vytáhneme jich 5, jaká je pst, že to budou právě 3 černé a 2 bílé? $[1/12]$

3.4. Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme 3 mincemi. Určete pst, že alespoň v jednom hodu padnou 3 líce. [0.9308]

3.5. Z 50 výrobků, z nichž 20 je kazových, vybereme 10. Jaká je pst, že mezi vybranými výrobky bude 6 dobrých a 4 kazové? [0.2801]

3.6. Kolik pokusů s pstí $p = 1 - \frac{1}{e^5}$ musíme udělat, aby pst alespoň 1 úspěchu byla alespoň $1 - \frac{1}{e^{12}}$? [3]

3.7. Sekretářka má rozeslat pět dopisů pěti různým adresátům. Dopisy vkládá do nadepsaných obálek náhodně. Jaká je pst, že alespoň jedna osoba dostane dopis určený pro ni? [0.6333]

3.8. Ze sáčku s pěti bílými a pěti modrými koulemi náhodně vytáhneme 3 koule (nevracíme). Jaká je pst, že dvě budou modré a jedna bílá? [0.4167]

3.9. Náhodně vybereme přirozené číslo menší než 10^5. Jaká je pravděpodobnost, že bude složeno pouze z cifer 0, 1, 5 a zároveň bude dělitelné pěti? [$161/99\,999 \doteq 0.0016$]

3.10. Z klobouku, ve kterém je 5 bílých a 6 černých koulí, náhodně vytahujeme koule. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule je černá? [$6/11$]

3.11. Kolik lidí musí být minimálně ve skupině, aby byla pravděpodobnost, že dva z nich mají narozeniny ve stejný den, větší než $1/2$? [23]

3.12. Určete pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7.
[$1/6$]

3.13. Jevy A, B, C jsou nezávislé a mají stejnou pravděpodobnost 0.1. Určete $P(A \cup B \cup C)$
[0.271]

3.14. V urně je šest koulí s čísly $1, 2, \dots, 6$. Koule vybíráme náhodně a nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že v žádném tahu nebude číslo koule shodné s pořadím tahu?
[0.3681]

3.2 Podmíněná pravděpodobnost

3.15. Jaká je pst, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, víme-li, že součet ok je dělitelný pěti? [$1/7$]

3.16. Urna obsahuje n koulí (bílé a černé) a víme, že byla naplněna takto: n-krát bylo hozeno kostkou, když padla 6, vložili jsme bílou kouli, jinak černou kouli. Z takto naplněné urny byly postupně vytaženy 2 koule, přičemž po prvním tahu byla koule vrácena zpět. Určete pst, že obě tažené koule jsou černé. [$\sum_{j=0}^{n} \frac{j^2}{n^2} \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^{n-j}$]

3.17. Jaká je pst, že při hodu dvěma kostkami padne součet 5, víme-li, že ani na jedné z nich nepadla trojka? Jsou jevy A: "ani na jedné 3" a B: "součet 5" nezávislé? [$2/25$, nejsou nez.]

3.18. Urna byla naplněna takto: čtyřikrát bylo hozeno mincí, když padl líc, byla vložena černá koule, když rub, tak bílá. Postupně z této (promíchané) urny vybereme dvě koule, přičemž po prvním tahu kouli do urny vrátíme. Jaká je pst, že obě tažené koule jsou bílé? [$5/16$]

3.19. Systém se skládá z r sériově zapojených článků, přičemž pro zvýšení spolehlivosti je i-tý článek složen z n_i paralelně spojených bloků. Označme A_{ij} j-tý blok v i-tém článku, víme, že bloky jsou stochasticky nezávislé a pst, že budou fungovat, je p_{ij}. Jaká je pst, že celý systém bude OK? [$\prod_{i=1}^{r} [1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - p_{ij})]$]

3.20. Systém je tvořen dvěma nezávislými bloky A_1 a A_2, pst, že blok funguje je ϑ_1, resp. ϑ_2. Určete pst, že systém bude pracovat správně, jsou-li bloky zapojeny a) sériově, b) paralelně.
[a) $\vartheta_1 \cdot \vartheta_2$, b) $\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_1 \cdot \vartheta_2$]

3.21. V urně jsou čtyři lístky s označené čísly $000, 110, 101, 011$. Uvažujme náhodné jevy A_i ($i = 1, 2, 3$) – náhodně vytažený lístek má na i-tém místě 1. Jsou tyto jevy nezávislé?
[po dvou jsou nezávislé, po třech nejsou nezávislé]

3.3 Geometrická pravděpodobnost

3.22. Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělěna na tři díly. Určete pst, že alespoň jeden díl bude nejvýše 20 cm dlouhý. $[0.51]$

3.23. Dva kamarádi se domluvili, že se setkají na určitém místě. Přitom každý z nich přijde na místo nezávisle na druhém v náhodném okamžiku mezi 19. a 20. hodinou, počká 20 minut a jestliže se druhý během této doby nedostaví, odejde. Jaká je pst, že se setkají, resp. že přijdou současně? $[5/9$, resp. $0]$

3.24. Ze čtverce s vrcholy $[1, 1]$, $[-1, 1]$, $[-1, -1]$, $[1, -1]$ náhodně vybereme bod M se souřadnicemi $[\xi, \eta]$. Určete pst, že kvadratická rovnice $x^2 + \xi x + \eta = 0$ má reálné kořeny. $[13/24]$

3.25. Proti (dostatečně velké) síti se čtvercovými oky – 8×8 cm je kolmo vržen míček o průměru 5 cm. Jaká je pst, že proletí bez doteku sítě? $[9/64]$

3.26. Dvě firmy dováží do obchodu zboží. Nákladʼáčky přijíždí (náhodně) mezi pátou a osmou hodinou ranní. Odbavení nákladʼáčku trvá 40 minut. Určete pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat než bude odbaven druhý.
$[0.3951]$

3.27. Střílíme na terč o průměru 60 cm. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhneme středový kruh o průměru 5 cm? (Terč zasáhneme jistě.)
$[0.0069]$

4 Geometrie v rovině

4.1. Určete průsečík přímek p a q daných rovnicemi

$$p : x = 1 - t, y = 2 + 2t, \quad q : x = 2s, y = 1 - s.$$

$[[2, 0]]$

4.2. Spočítejte velikost úhlu, který svírají vektory $u = (4, 3)$ a $v = (3, 2)$. $[\cos\varphi = \frac{18}{5\sqrt{13}}]$

4.3. Otočte bod $[3, 1]$ o úhel $\pi/2$ v záporném smyslu (ve směru hodinových ručiček) kolem počátku.
$[[1, -3]]$

4.4. Zrcadlete bod $[3, 1]$ podle osy procházející počátkem a bodem $[1, 1]$. $[[1, 3]]$

4.5. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$: $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$, $C = [2, 3]$.

a) Určete, které strany trojúhelníku ABC, jsou viditelné z bodu $P = [4, 4]$. $[BC]$

b) Otočte trojúhelník o 60° v kladném smyslu kolem počátku.
$[A' = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right], B' = \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+3\sqrt{3}}{2}\right], C' = \left[\frac{2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right]]$

c) Zrcadlete trojúhelník ABC podle přímky $p : x - y = 1$.
$[A'' = [2, 0], B'' = [3, 2], C'' = [4, 1]]$

d) Spočítejte obsah tohoto trojúhelníku. $[S_\triangle = \frac{3}{2}]$

4.6. Které strany čtyřúhelníku daného body $[1,4]$, $[2,-1]$, $[3,3]$ a $[4,1]$ vidí pozorovatel stojící v bodě $[7,2]$? [nevidí stranu $[2,-1],[1,4]$]

4.7. Zrcadlete úsečku danou body $A=[1,3]$, $B=[-1,3]$ podle přímky $y=-x$.
$[A'=[-3,-1], B'=[-3,1]]$

4.8. Určete $vol\triangle$, kde trojúhelník je ohraničen přímkami

$$p\colon [0,1]+t\cdot(1,2),\quad q\colon [2,3/2]+s\cdot(1,-3/2),\quad r\colon [1,-1/2]+z\cdot(-2,-1/2).$$

$[vol\triangle=7]$

4.9. Rovnostranný trojúhelník ležící celý v prvním kvadrantu je dán vrcholy $[1,0]$ a $[0,1]$. Určete souřadnice třetího vrcholu. $[[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}]]$

4.10. Z počátku $[0,0]$ (rovina $\mathbb{R}^2$ se standardní soustavou souřadnic) je vyslán laserový paprsek ve směru $(3,1)$. Dopadne na zrcadlovou přímku $p\colon [4,3]+t\cdot(-2,1)$, poté se odrazí (úhel odrazu je roven úhlu dopadu). V jakém bodě dopadne odražený paprsek na přímku $q\colon [7,-10]+s\cdot(-1,6)$? [v žádném]

4.11. Spočítejte obsah trojúhelníku daného přímkami:

$$p\colon [1,0]+t(2,1),\quad q\colon [2,8]+s(1,3),\quad r\colon [4,-1]+u(2,-4).$$

$[S_\triangle=10]$

4.12. Napište souřadnice vrcholů trojúhelníku, který vznikne otočením rovnostranného trojúhelníku s těžištěm v bodě $[0,0]$ a vrcholem v bodě $C=[0,1]$ o 90° kolem bodu $S=[1,0]$.
$[A'=[3/2,-\sqrt{3}/2-1], B'=[3/2,\sqrt{3}/2-1], C'=[0,-1]]$

4.13. Co vznikne složením dvou středových souměrností podle různých středů?
[posunutí o vektor $v=2(S_2-S_1)$]

5 Relace a zobrazení

5.1. Co lze říci o relaci "být potomkem", kterou uvažujeme na množině lidí?

5.2. Určete, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní, úplné.

- $a\varrho b \Leftrightarrow 5|a-b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $[R,S,T]$
- $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $a,b\in A$, $a\varrho b\Leftrightarrow a^3-a=b^3-b$, $[R,S,T]$
- $a\varrho b\Leftrightarrow (a=b\vee a=b+1)$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $[R,Ats]$
- $a,b\in\mathbb{N}$, $a\varrho b\Leftrightarrow a\le b$, $[R,Ats,T,U]$
- $a,b\in\mathbb{N}$, $a\varrho b\Leftrightarrow a\cdot b=2k-1, k\in\mathbb{N}$, $[S,T]$
- $[x,y]\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,
$$[x_1,y_1]\varrho[x_2,y_2]\Leftrightarrow (x_1<x_2)\vee(x_1=x_2\wedge y_1\le y_2),$$
$[R,Ats,T,U]$
- kružnice k_1 v $\mathbb{R}^2$ je v relaci ϱ s kružnicí k_2 v $\mathbb{R}^2$, jestliže k_1 leží uvnitř k_2, přičemž jsou povoleny společné body,
$[R,Ats,T]$
- $A=$ přímky v rovině, $p\varrho q\Leftrightarrow p\perp q, \forall p,q\in A$, $[S]$
- $x\varrho y\Leftrightarrow |x-y|=3$ nebo $x=y, \forall x,y\in\mathbb{N}$, $[R,S]$
- $x\varrho y\Leftrightarrow |x|\ge|y|, \forall x,y\in\mathbb{Z}$. $[R,T,U]$

5.3. Určete, zda jsou následující relace na množině M ekvivalencemi. Pokud ano, popište příslušné třídy rozkladu.

- $M = \mathbb{N}$, $x \sim y \Leftrightarrow NSD(x, y) > 1$,
- $M = \mathbb{N}$, $x \sim y \Leftrightarrow nsn(x, y) > 1$,
- $M = \{f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)$,

5.4. Zjistěte, zda zobrazení f je injektivní, surjektivní, popř. bijektivní:

- $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}$, [není]
- $f(x) = x^2, x \in \mathbb{N}$, $[I, S, B]$
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2, \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$, $[I, S, B]$
- $x \in \mathbb{R} - \{0\}, f : x \mapsto \frac{3x-4}{2x}$, $[I]$
- $x \in \mathbb{R}_0^+, x \mapsto [x]$ (celá část čísla x), [není]
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{4x-5}{12}$. $[I, S, B]$

5.5. Jsou dána zobrazení f, $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$, g, $g(x) = 2x + 1$. Určete následující zobrazení

- $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$, $[\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}]$
- $(f \circ g)^{-1}(x)$, $[\frac{3}{4}x - \frac{3}{8}]$
- $(g \circ f)(x)$. $[\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}]$

5.6. Jsou dána zobrazení $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x + \frac{5}{3}$. Určete následující zobrazení

- $(f \circ g)(x)$, $[6x + 1]$
- $(g \circ f)(x)$, $[6x - \frac{19}{3}]$
- $(f \circ g)^{-1}(x)$, $[\frac{x-1}{6}]$
- $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$. $[\frac{3x+19}{18}]$

5.7. Popište nějaké uspořádání přirozených čísel, které není dobré.

5.8. Uvažujme relaci $a \prec b \Leftrightarrow a^b < b^a$. Ukažte, že jde o ostré uspořádání (tranzitivní, asymetrické) na $\mathbb{N}$, které není úplné. Nalezněte minimální prvek, jestli existuje. [1]

6 Vektory a matice

6.1. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé

- $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 3, 1)$, $w = (1, 3, 2)$, $[LZ]$
- $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (4, 3, -1)$, $[LNZ]$
- $u_1 = (1, 1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 1, 3, 1)$, $u_3 = (2, 1, 3, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 3)$. $[LZ]$

6.2. Z vektorů $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 1, 2, 3)$, $v_4 = (1, 0, 1, 0)$, $v_5 = (2, 3, 1, 2)$ vyberte největší možnou lineárně nezávislou podmnožinu vektorů. [např. v_1, v_2, v_3, v_4]

6.3. Vyberte z následujících vektorů co nejvíce lineárně nezávislých $u_1 = (1, 2, -3)^T$, $u_2 = (2, -1, 3)^T$, $u_3 = (-3, 4, -9)^T$, $u_4 = (6, 0, 1)^T$, $u_5 = (4, 1, -2)^T$. [např. u_1, u_2, u_4]

6.4. Jsou uvedené prvky lineárně nezávislé?

- $x^2 + x + 3 = 0, x + 1 = 0, 2x^2 + 3x + 1 = 0, x^2 - 3 = 0$ v $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$, $[LZ]$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ v $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, $[LZ]$
- $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ v $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$. $[LNZ]$

6.5. Určete konstantu k tak, aby polynomy $kx^2 + x + 2$, $-2x^2 + kx + 3$ a $x^2 + 2x + k$ byly lineárně závislé v prostoru $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$. $[k_1 = -1, k_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}]$

6.6. Ověřte, zda vektor $u = (7, 2, -2)^T$ náleží do množiny M.

$$M = \mathrm{Span}\big((1, 0, -1)^T, (2, 1, 0)^T, (0, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T, (5, 2, -1)^T\big)$$

[nenáleží]

6.7. Seskládejte matice tak, aby šly vynásobit, a vynásobte je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$[B \cdot C \cdot A]$

6.8. Vypočtěte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.9. Rozhodněte, zda existují inverzní matice k následujícím maticím, jestliže ano, pak tyto inverze vypočtěte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[ano, ne]

6.10. Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[h(A) = 2, h(B) = 2, h(C) = 2]$

6.11. Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 2 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}^4.$$

6.12. Vyřešte rovnice

$$\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2-x & 5 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 2x & x-3 \end{vmatrix} = -7, \qquad \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -4 \\ -1 & 1-x & 1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

[$x = 1$; $x = -1 \pm \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} \pm i\sin\frac{5\pi}{6})$; $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2$]

6.13. Určete matici adjungovanou k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

[$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$]

6.14. Pomocí Gaussovy eliminační metody nalezněte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 3x_1 \quad\; + 3x_3 - 5x_4 &= -8 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[$x = (-1 + b, b, \frac{3}{2}b, \frac{3}{2}b), b \in \mathbb{R}$]

6.15. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x - y + z &= 1 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

[$x = \frac{4}{5}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{9}{10}$]

6.16. Řešte soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

6.17. Řešte soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$$

6.18. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametrech c a d, proveďte diskuzi řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 1 & c-1 & -c-3 & -5 \\ 1 & c+1 & 2 & d-1 \end{array}\right)$$

6.19. Nalezněte LU-rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

6.20. A ještě jeden LU-rozklad:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

7 Vektorové prostory a lineární zobrazení

7.1. Ověřte axiomy vektorového prostoru u následujících množin (s uvedenými operacemi):

- $V = \mathbb{C}$, $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$, $\alpha \cdot (a + bi) = \alpha \cdot a \ + (\alpha \cdot b)i$,
- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 3}$, sčítání matic, násobení matic reálným číslem,
- $V = \mathbb{R}^+$, $x \oplus y := \frac{x \cdot y}{2}$, $a \odot x := x^a$, $\forall x, y \in V$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
- $V = \{(x, y)\}$, $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$, $k \cdot (x, y) = (2kx, 2ky)$,
- $V = \{(1, z)\}$, $(1, z) + (1, w) = (1, z + w)$, $k \cdot (1, z) = (1, kz)$,
- $V \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, matice typu $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, sčítání matic, násobení matic reálným číslem,
- $V = \mathbb{C}_2[x] = \{z_0 + z_1 x + z_2 x^2, z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ nad $\mathbb{C}$,
- $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, sčítání matic, násobení matic reálným číslem.

7.2. Rozhodněte, zda následující množiny s operací $+$ tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel

- čtvercové matice řádu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, [ano, $dim = n^2$]
- symetrické matice řádu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, [ano, $dim = \frac{n(n+1)}{2}$]
- invertibilní matice řádu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$, [ne]
- antisymetrické matice řádu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. [ano, $dim = \frac{(n-1)n}{2}$]

Jestliže ano, určete jejich dimenzi a popište nějakou jejich bázi.

7.3. Rozhodněte, zda polynomy nad reálnými čísly stupně nejvýše k tvoří vektorový prostor. Jestliže ano, napište nějakou jeho bázi a určete jeho dimenzi. [ano, $dim = k + 1$]

7.4. Je to podprostor (vektorového) prostoru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$?

a) přímka $x = y$, [ano]
b) přímka $y = x + 1$, [ne]
c) první kvadrant (včetně hraničních polopřímek). [ne]

7.5. Napište nějakou bázi vektorových prostorů $V_1 = \mathbb{R}^3$, $V_2 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $V_3 = \mathcal{P}_2$ – polynomy stupně nejvýše 2.

7.6. Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru komplexních čísel a) $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, b) $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$
[a) $B = \{1, i\}$, $dim = 2$, b) $B = \{1\}$, $dim = 1$]

7.7. Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly – sčítání vektorů je sčítání komplexních čísel. Ukažte, že čísla $1 + i$ a $1 - i$ tvoří bázi tohoto prostoru a napište souřadnice čísla $5 - 2i$ v této bázi. [$(3/2, 7/2)$]

7.8. Tvoří vektory $(1, 1, 1)^T$, $(1, 2, 0)^T$ a $(1, 3, 1)^T$ bázi $\mathbb{R}^3$? [ano]

7.9. Doplňte množinu M tak, aby byla bází prostoru V:

- $M = \{(-1, 1, 0, 0)^T, (0, -1, 1, 0)^T, (0, 0, -1, 1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$,
[libovolný jeden z vektorů e_1, e_2, e_3, e_4]
- $M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. [např. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]

7.10. Je to lineární zobrazení?

- $L(u) = a \cdot u$, [ano]
- $L(u) = a \cdot u + 1$, [ne]
- $$L(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$
[ano]

7.11. Ověřte, že zobrazení L je lineárním zobrazením, a napište matici, kterou je reprezentováno.

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 + 3u_2 + 2u_3 \\ 5u_1 + u_2 + 6u_3 \\ 2u_2 + u_3 \end{pmatrix}.$$

7.12. Určete jádro (Ker f) a obraz (Im f) zobrazení f daného maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.13. Určete souřadnice vektoru $(2, 3, -1)^T = w_{\underline{e}}$ v bázi

$$\underline{u} = \left((1, 1, 1)^T, (1, 2, 0)^T, (1, 3, 1)^T\right).$$

[$w_{\underline{u}} = (2, 3, -1)^T$]

7.14. Najděte matici přechodu od báze $\underline{e} = (1, x, x^2)$ k bázi $\underline{u} = (1, x+1, 1-x^2)$. [$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$]

7.15. Najděte matici přechodu v $\mathbb{R}^2$ od báze $\underline{u} = \left((1, 2)^T, (-2, 3)^T\right)$ k bázi $\underline{v} = \left((3, 1)^T, (2, 1)^T\right)$.
[$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$]

7.16. Napište matici A reprezentující lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L(u) = 2u_1v_1 - (u_1+u_2)v_2$, kde $u = (u_1, u_2)^T$ a $v_1 = (1, 2, -1)^T$, $v_2 = (1, 0, 1)^T$,

- ve standardních bázích $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, [$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$]
- v bázích $\underline{\alpha} = \big((1,1)^T, (0,1)^T\big)$ a $\underline{\beta} = \big((2,1,1)^T, (1,2,-1)^T, (0,0,1)^T\big)$. [$\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ 8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]

7.17. Napište matici zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bázích $\underline{u} = \big((1,2,0)^T, (-2,1,0)^T, (3,1,-1)^T\big)$, $\underline{v} = \big((2,1)^T, (0,2)^T\big)$. [$A_{\underline{u},\underline{v}} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 4 \\ -1/4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$]

7.18. Matice zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\underline{\alpha} = \big((1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,0)^T\big)$ je tvaru

$$A_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete tvar matice zobrazení ve standardní bázi. [$A_{\underline{e},\underline{e}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$]

7.19. Je dána matice zobrazení $A_{\underline{e},\underline{e}}$, určete matici tohoto zobrazení v bázi $\underline{v}$.

$$A_{\underline{e},\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

[$A_{\underline{v},\underline{v}} = \begin{pmatrix} -1/4 & 2 & -3/4 \\ 5/4 & 0 & 7/4 \\ 3/4 & -2 & 9/4 \end{pmatrix}$]

7.20. Napište matici zobrazení:

- zrcadlení podle roviny procházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 0, 1)$,
- otočení o úhel β kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $(0, -1, 1)$.

7.21. Určete, jaké lineární zobrazení zadává matice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.22. Najděte matice Q takové, že

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Jaké zobrazení matice Q^2 reprezentuje? [$Q^2 = Rot_{60^\circ}, Q_1 = Rot_{30^\circ}, Q_2 = Rot_{210^\circ}$]

8 Vektorové prostory se skalárním součinem

8.1. Jsou následující vektorové podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$ kolmé?

$$U = \mathrm{Span}\langle (1,2,3,0)^T, (1,-1,0,0)^T \rangle, \quad V = \mathrm{Span}\langle (2,2,-2,5)^T \rangle.$$

[ano]

8.2. Jsou matice následující matice ortogonální?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

[A: ano, B: ne, C: ano]

8.3. Určete čísla a, b tak, aby matice A byla ortogonální

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & a & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & b & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$[a = -\frac{4}{9}, b = \frac{4}{9}]$

8.4. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortonormální bázi prostoru

$$V = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0), (1,1,2,3), (0,1,0,0) \rangle.$$

$[B = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1)\}]$

8.5. Určete ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu z báze $\underline{u} = \big((1,2,1)^T, (0,1,1)^T, (2,-1,1)^T\big)$.

$[v_1 = (1,2,1)^T, v_2 = (-1/2, 0, 1/2)^T, v_3 = (4/3, -4/3, 4/3)^T]$

8.6. Určete projekci vektoru $u = (3,1)$ do prostoru $W = \langle (1,0) \rangle$. $[p_W(u) = (3,0)]$

8.7. Určete projekci vektoru $v = (1,-1,2,1)^T$ na prostor

$$W = \mathrm{Span}\big\langle (1,2,1,0)^T, (-1,0,1,0)^T, (1,-1,1,0)^T \big\rangle.$$

$[p_W(v) = (1,-1,2,0)^T]$

8.8. Určete kolmý průmět vektoru $(0,0,7)$ do podprostoru generovaného vektory $(1,2,1)$, $(-2,1,1)$. $[p = (-1, 5/3, 1/3)]$

8.9. Najděte nějakou ortonormální bázi vektorového podprostoru V v $\mathbb{R}^3$ daného rovnicí $2x - 3y + z = 0$.
[např. $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2), v_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(6,5,3)$]

8.10. Určete $\cos\varphi$, kde φ je odchylka dvou sousedních stěn pravidelného osmistěnu.

$[\cos\varphi = 1/3]$

8.11. Určete odchylku rovin σ a ϱ.

$$\sigma\colon [1,0,2] + t_1(1,-1,1) + t_2(0,1,-2), \quad \varrho\colon [3,3,3] + s_1(1,-2,0) + s_2(0,1,1).$$

$[\varphi = \pi/3]$

8.12. Zjistěte, zda body $[0, 2, 1]$, $[-1, 2, 0]$, $[-2, 5, 2]$ a $[0, 5, 4]$ leží v jedné rovině. [ano]

8.13. Zjistěte, zda bod $[2, 1, 0]$ leží uvnitř konvexního obalu bodů $[0, 2, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[3, -2, -1]$ a $[-1, 0, 1]$. []

8.14. Je dán rovnoběžník $[0, 0, 1]$, $[2, 1, 1]$, $[3, 3, 1]$, $[1, 2, 1]$. Určete bod $X = [x_1, x_2, x_3]$ na přímce $p\colon [0, 0, 1] + t(1, 1, 1)$ tak, aby rovnoběžnostěn určený daným rovnoběžníkem a bodem X měl objem roven 1. []

8.15. Je dána krychle (standardní označení) $ABCDA'B'C'D'$. Určete odchylku vektorů AB' a AD'. $[\varphi = \pi/3]$

9 Vlastní čísla a vektory

9.1. Spočítejte vlastní čísla a určete příslušné vlastní vektory matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -16 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[A: $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{33}}{2}$, B: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -16$, C: $\lambda_{1,2} = 5$, D: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$]

9.2. Spočítejte vlastní čísla a určete příslušné vlastní vektory matic

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

[A: $\lambda_1 = \frac{1}{3}, u_1 = (1, 1, 1), \lambda_{2,3} = 2, u_2 = (-2, 1, 0), u_3 = (-1, 0, 1)$]
[B: $\lambda_{1,2} = 1, u_1 = (-2, 1, 0), u_2 = (-1, 0, 1), \lambda_3 = -1, u_3 = (1, 2, 1)$]
[C: $\lambda_1 = 2, u_1 = (1, 1, 1), \lambda_{2,3} = 6, u_2 = (-1, 0, 1), u_3 = (-2, 1, 0)$]

9.3. Spočítejte vlastní čísla matic, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[A: $\lambda_1 = 2, an = 1, gn = 1, \lambda_{2,3} = 2, an = 2, gn = 1$]
[B: $\lambda_{1,2,3} = 2, an = 3, gn = 1$]
[C: $\lambda_{1,2,3,4} = 1, an = 4, gn = 2$]

9.4. Spočítejte vlastní čísla matice A. Pak spočítejte vlastní čísla matice A^{-1} a porovnejte je s vlastními čísly matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$[\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}, \mu_{1,2} = \pm\frac{1}{i\sqrt{5}}]$

9.5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$[\lambda_1 = 3, u_1 = (-1, 1, 0), \lambda_{2,3} = 2, u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (3, 1, 0)]$

9.6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jaký tvar bude mít matice v bázi tvořené vlastními vektory matice A?

$$[\lambda_{1,2} = 2, u_1 = (-1,1,0), u_2 = (1,0,1), \lambda_3 = 1, u_3 = (1,1,1), A_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

9.7. Diagonalizujte matici A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}]$$

9.8. Napište příklad dvou matic, které mají stejná vlastní čísla a stejnou množinu vlastních vektorů, a přesto jsou různé.

10 Modely a procesy

10.1. Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které jsou rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho roku do dvou let a od dvou do tří let. Předpokládejme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadající na jednu krysu je následující: v první skupině je to nula, ve druhé i třetí skupině dvě krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku, umírají až po druhém roce života (tj. úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině, víte-li, že daná populace stagnuje.

[1/4]

10.2. Uvažujme populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem dva malé nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Mladí nezmaři (do stáří jednoho měsíce) neplodí. Polovina nezmarů po dovršení druhého měsíce umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni. Napište Leslieho matici nezmařího modelu a určete na jaké hodnotě se ustálí poměr mezi věkovými skupinami a na jeké hodnotě se ustálí přírůstek populace. $[3+\sqrt{5} : 1+\sqrt{5} : 1$, $4\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 0.62]$

10.3. Uvažujme populaci lososích samiček, kterou lze rozčlenit na tři věkové skupiny. Z první skupiny přežije 5 %, z druhé skupiny přežije 10 %. Každá samička třetí věkové skupiny snese 200 jiker. Jak se tato populace chová?

[stagnuje]

10.4. Mějme dán zjednodušený model populace sýkory koňadry (lat. *Parus major*). Populace je rozdělena do čtyř věkových skupin: vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že vajíček bývá zničena polovina a mláďat uhyne (v obou skupinách) čtvrtina. Pár dospělých sýkorek snese 16 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a poměr mezi věkovými skupinami.

[přírůstek 20% za období, poměr $66 : 27 : 17 : 10$]

10.5. Mějme dánu populaci ve městě a na jeho předměstí. Předpokládá se, že se každý rok 40% obyvatel města přestěhuje na předměstí a naopak 30% obyvatel se z předměstí přestěhuje do města. Jak se ustálí počet obyvatel ve městě a na předměstí?

[město: 43%, předměstí: 57%]

10.6. Zkoumáme "svéhlavou" výrobní linku. Pozorováním jsme zjistili, že pokud je linka v daném období v provozu, tak v následujícím období bude v provozu v 50 % případů a půjde do opravy v 50 % případů. Pokud je linka v opravě, pak v následujícím období zůstane v opravě v 75 % případů, zpět do provozu půjde jen v 25 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že linka bude v provozu?

[33%]

10.7. Země Oz je velebena pro mnoho věcí, ale nikoli pro dobré počasí. Nikdy nenastanou dva slunečné dny za sebou. Když je slunečno, může druhý den jak sněžit tak pršet. Když prší nebo sněží, bude druhý den (se stejnou pravděpodobností) stejně. Pokud to vypadá, že se po dešti, resp. sněhu změní počasí, jen v polovině případů bude slunečno. S jakou pravděpodobností bývá v zemi Oz slunečné počasí?

[0.2]

11 Analytická geometrie

11.1. Určete průnik podprostorů $U = \langle (1,1,1), (-2,3,0) \rangle$ a $V = \langle (1,-1,5), (3,2,-1) \rangle$

[$U \cap V = \langle (15,5,11) \rangle$]

11.2. Najděte příčku mimoběžek $p\colon [1,1,1] + t \cdot (2,1,0)$, $q\colon [2,2,0] + s \cdot (1,1,1)$, která prochází bodem $M = [1,0,0]$.

[$[1,0,0] + t(4,5,3)$]

11.3. Najděte osu (tj. příčku, která je kolmá na obě mimoběžky) mimoběžek $p\colon [-3,-1,1] + t \cdot (4,2,0)$, $q\colon [3,3,1] + s \cdot (-1,-1,-1)$.

[$[3,2,1] + u(-1,2,-1)$]

11.4. Určete $\cos\varphi$, kde φ je odchylka přímek p, q daných v $\mathbb{R}^3$ obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} p\colon & -2x + y + z = 1, x + 3y - 4z = 5, \\ q\colon & x - y = -2, z = 6. \end{aligned}$$

[$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$]

11.5. Určete osu mimoběžek $p\colon [3,0,3] + t(0,1,2)$ a $q\colon [0,-1,-2] + s(1,2,3)$.

[$[3,1,5] + t(-1,2,-1)$]

11.6. Určete průnik přímky p s rovinou α

$$p\colon [0,0,7] + t(1,-3,5), \quad \alpha\colon [0,5,3] + s_1(1,2,1) + s_2(-2,1,1).$$

[$P = [-1,3,2]$]

11.7. Parametricky vyjádřete průnik rovin σ a τ v $\mathbb{R}^3$

$$\sigma\colon 2x + 3y - z + 1 = 0, \quad \tau\colon x - 2y + 5 = 0.$$

[$[-17/7, 9/7, 0] + t(2,1,7)$]