3

Vektorové prostory

Definice: Vektorovým prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu V, $(V \neq 0)$, na které jsou definovány operace $\oplus$, která každé dvojici prvků $x \in V$ a $y \in V$ přiřazuje prvek $x \oplus y \in V$ $(x \in V, y \in V \Rightarrow x \oplus y \in V)$ a operace $\odot$, která každé dvojici $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in V$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x \in V \Rightarrow \alpha \odot x \in V)$ přiřazuje prvek $\alpha \odot x \in V$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

1. $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé x a $y \in V$ (komutativní zákon sčítání)

2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ pro každé x, y a $z \in V$ (asociativní zákon sčítání)

3. existuje prvek $\Theta \in V$ takový, že $x \oplus \Theta = x$ pro každé $x \in V$ (existence nulového prvku)

4. ke každému $x \in V$ existuje $y \in V$ takový, že $x \oplus y = \Theta$ (existence opačného prvku)

5. $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$ pro každé $\alpha, \beta \in R$ a $x \in V$ (asociativní zákon násobení)

6. $1 \odot x = x$ pro každé $x \in V$ (násobení jedničkou)

7. $\alpha \odot (x + y) = \alpha \odot x + \alpha \odot y$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x, y \in V$ (distributivní zákon vzhledem k operaci sčítání prvků z V)

8. $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x + \beta \odot x$ pro každé $\alpha, \beta \in R$ a $x \in V$ (distributivní zákon vzhledem k operaci sčítání čísel z $\mathbb{R}$)

Poznámky: Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory. Reálným číslům u operace násobení říkáme skaláry.

Značení: Podobně jako u matic píšeme většinou $x + y$ resp. αx místo $x \oplus y$ resp. $\alpha \odot x$ (nikdy nepíšeme $x\alpha$) a nulový prvek Θ (nulový vektor) označujeme jako 0.

Poznámka: Podobně lze definovat komplexní vektorový prostor, nebude-li řečeno jinak, budeme se zabývat reálnými vektorovými prostory a místo "vektorový prostor" budeme říkat jednoduše "prostor".

Příklady vektorových prostorů

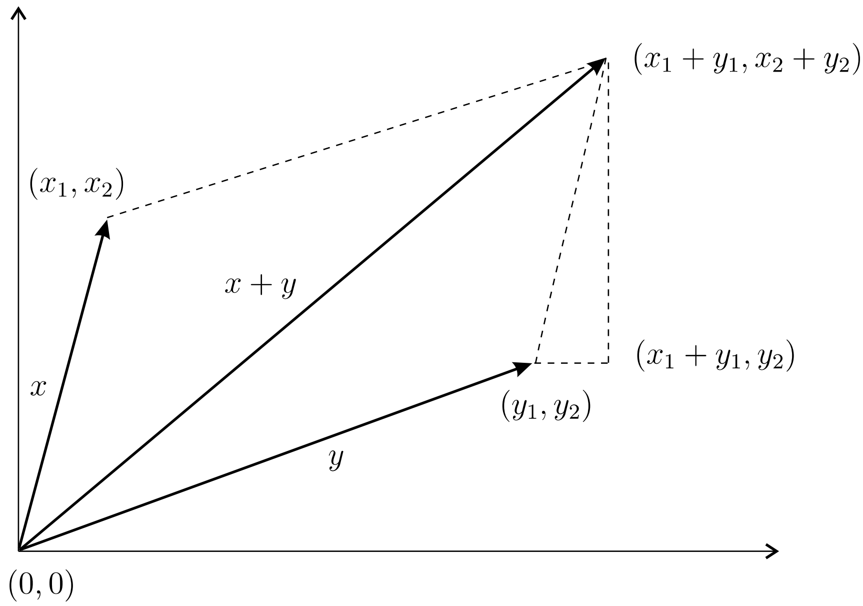
1. Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$: množina uspořádaných n-tic reálných čísel

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{R},$$

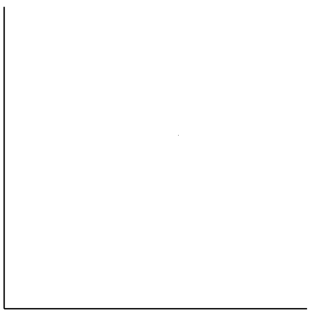
$$x \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \oplus x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

2. Vektorový prostor $\mathbb{R}^{m,n}$ (množina všech matic typu $m \times n$; prostor $\mathbb{R}^{m,1}$ v některých případech ztotožňujeme s prostorem $\mathbb{R}^m$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$



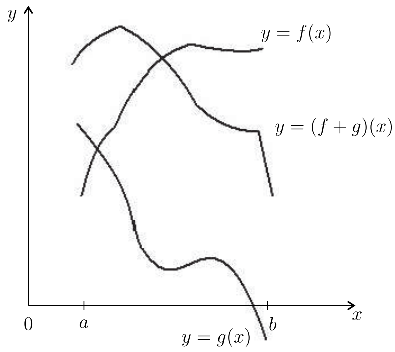
Obrázek 3.1: Dvourozměrný euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$ (případ $n = 2$)



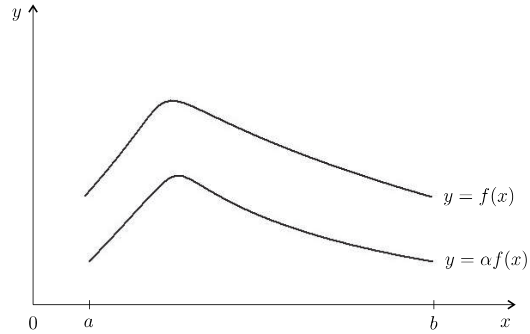
3. Prostor všech spojitých funkcí ($f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$) na intervalu $\langle a, b\rangle$ označujeme $C\langle a, b\rangle$:

$$f,\ g \in C\langle a, b\rangle : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad x \in \langle a, b\rangle \\ (\alpha \odot f)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle \end{aligned}$$



Obrázek 3.4:



Obrázek 3.5:

4. Vektorový prostor všech polynomů reálné proměnné ($x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$); (nulový polynom $\Theta(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$):

$$x,\ y \in \mathcal{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x \oplus y)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) + y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ (\alpha \odot x)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha.x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5. Prostor reálných polynomů reálné proměnné, jejichž stupeň je nejvýše $n-1$ označujeme $\mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) &= b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1} t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R} \\ (x \oplus y)(t) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1}, \forall t \in \mathbb{R} \\ (\alpha \odot x)(t) &= \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \cdots + \alpha a_{n-1} t^{n-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definice: Neprázdnou podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme jeho podprostorem, jestliže má tyto vlastnosti:

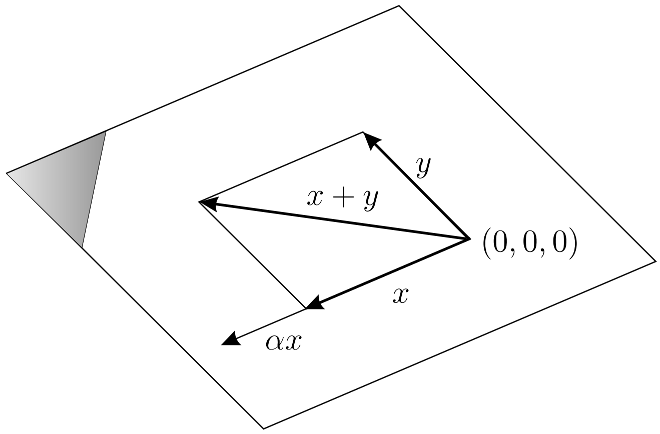
1. pro každé x a $y \in W$ je $x + y \in W$,

2. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in W$ je $\alpha x \in W$;

jinými slovy, jestliže je množina W sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání a násobení skalárem definovaným na prostoru V.

Příklad: Prostor $\mathcal{P}_n$ je podprostorem prostoru $\mathcal{P}$ a ten je podprostorem prostoru $C(\mathbb{R})$ (což je prostor všech spojitých funkcí definovaných na $\mathbb{R}$).

Příklad: Prostor $\mathbb{R}^3$ lze ztotožnit s třírozměrným Euklidovským prostorem. Podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$ je např. každá rovina procházející počátkem $\Theta = (0, 0, 0)$.



Obrázek 3.6:

Definice: Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je soubor vektorů z prostoru V, kde $n \in \mathbb{N}$. Říkáme, že vektor x je lineární kombinací souboru $x_1, \ldots, x_n$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že platí $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme koeficienty lineární kombinace.

Příklad: Zjistěte, zda lze vektor $x = (2, 6, 8)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (-2, -4, -2)$, $x_3 = (0, 2, 3)$, $x_4 = (2, 0, -3)$ a $x_5 = (-3, 8, 16)$.

Potřebujeme tedy ověřit, zda existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ takové, že platí $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_5 x_5$. Po dosazení jednotlivých vektorů získáme následující identity

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_5 x_5 \\ (2,6,8) & = & \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-2,-4,-2) + \alpha_3(0,2,3) + \alpha_4(2,0,-3) + \alpha_5(-3,8,16) \\ (2,6,8) & = & (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4 - 3\alpha_5, 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 8\alpha_5, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_4 + 16\alpha_5) \end{array}$$

vedoucí na soustavu 3 lineárních rovnic o 5 neznámých tvaru

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4 - 3\alpha_5 & = & 2 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 8\alpha_5 & = & 6 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 + 16\alpha_5 & = & 8 \end{array}$$

Je-li tato soustava řešitelná, pak je x lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Dále postupujeme standardním způsobem: upravíme matici soustavy do horního stupňovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 8 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 16 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 19 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 19 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

a získáme ekvivalentní soustavu (znovu) 3 lineárních rovnic o 5 neznámých

$$\begin{array}{rcl} \alpha_4 - 2\alpha_5 & = & 3 \\ \alpha_3 - 2\alpha_4 + 7\alpha_5 & = & 1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4 - 3\alpha_5 & = & 2 \end{array}$$

která má obecné řešení tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - u + 2v \\ v \\ 7 - 3u \\ 3 + 2u \\ u \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

a tedy například, zvolíme-li $u = v = 0$, je $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 7$, $\alpha_4 = 3$ a $\alpha_5 = 0$ a platí $x = -4x_1 + 7x_3 + 3x_4$. Vektor x je lineární kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_5$.

Definice: Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je soubor vektorů z V. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazýváme lineárním obalem souboru $x_1, \ldots, x_n$ a značíme $[x_1, x_2, \ldots, x_n]_\lambda = \left\{ x \middle| \; x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \text{ pro jistá } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Tvrzení: Pro libovolné vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$ je prostor $[x_1, \ldots, x_n]_\lambda$ podprostorem prostoru V.

Důkaz: $x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$

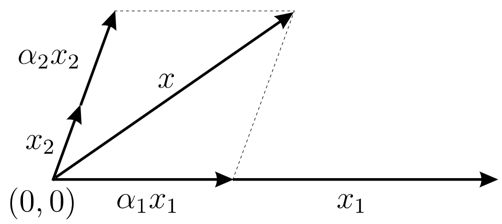
$$y \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda, \quad y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

$$x + y = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) x_j \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$$

$$\alpha x = \alpha \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^n (\alpha \alpha_j) x_j \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$$

Poznámka: Platí $\Theta \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, protože $\Theta = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n$.

Příklad: Uvažujme dvourozměrný euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$. Lineárním obalem dvou různých netriviálních (nenulových) vektorů je celá rovina (celý prostor $\mathbb{R}^2$). Libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou (různých) vektorů x_1 a x_2 (viz obr 3.7). Lineárním obalem jednoho netriviálního vektoru je přímka procházející počátkem (viz obr 3.8). Lineárním obalem nulového vektoru je bod (nulový vektor).

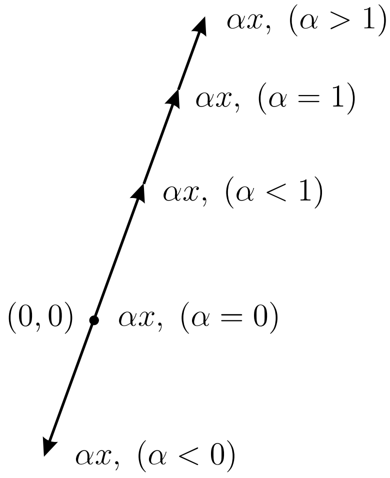


Obrázek 3.7:

Poznámky: Jestliže je $x_1, \ldots, x_n$ soubor vektorů, potom každý vektor $x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$$

Na koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ můžeme pohlížet jako na souřadnice vektoru x v souřadném systému daném vektory $x_1, \ldots, x_n$. Kdy jsou tyto souřadnice jed-



Obrázek 3.8:

noznačně určeny? Jestliže jednoznačně určeny nejsou, potom lze psát

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

kde $\alpha_j \neq \beta_j$ pro alespoň jedno j, takže

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) x_j = 0\,,$$

kde aspoň jedno $\alpha_j - \beta_j \neq 0$. Vyloučením této možnosti zaručíme jednoznačnost takového rozkladu. To nám umožní následující definice.

Definice: Soubor vektorů $x_1, \ldots, x_n \in V$ nazýváme lineárně závislý, jestliže existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž aspoň jedno je nenulové, taková, že platí

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \Theta$$

a lineárně nezávislý v opačném případě (t.j. z rovnosti $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \Theta$ vyplývá, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Příklad: Jak zjistíme, že jsou vektory lineárně závislé nebo nezávislé? Zjistěte, zda je soubor vektorů x_1, x_2, x_3 z prostoru $\mathbb{R}^3$ lineárně závislý nebo nezávislý, je-li: $x_1 = (3, 1, 5)$, $x_2 = (1, 2, -2)$ a $x_3 = (2, 3, -1)$. Ptáme se tedy, jak vypadají všechna $\alpha_1, \ldots, \alpha_3$ taková, že platí $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \Theta$.

Po dosazení za vektory x_1 , x_2 a x_3 získáváme rovnosti

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \Theta \\ \alpha_1(3,1,5) + \alpha_2(1,2,-2) + \alpha_3(2,3,-1) &= (0,0,0) \\ (3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 5\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

které po přepsání po jednotlivých složkách vedou k soustavě tří rovnic o třech neznámých tvaru

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Má-li tato soustava pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, pak je soubor x_1, x_2, x_3 lineárně nezávislý, jinak je lineárně závislý. Dále postupujeme obvyklým způsobem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 39 \end{pmatrix},$$

ze kterého vyplývá, že je soubor x_1, x_2, x_3 lineárně nezávislý.

Příklad: Zjistěte, zda je soubor A_1, A_2, A_3, A_4 z prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ lineárně nezávislý nebo lineárně závislý, je-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Hledáme taková čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, že platí

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \Theta.$$

Dosazením a rozepsáním po jednotlivých složkách

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 6\alpha_4 \\ -3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 + 10\alpha_4 & -4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

získáme následující homogenní soustavu čtyř lineárních rovnic pro čtyři neznámé α_1, α_2, α_3 a α_4:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 6\alpha_4 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 + 10\alpha_4 &= 0 \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

Obvyklým postupem převedeme tuto soustavu do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ -3 & 7 & 1 & 10 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 16 & 7 & 13 \\ 0 & 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soubor je tedy lineárně závislý, např. matici A_4 lze nakombinovat pomocí matic A_1, A_2, A_3 z čehož vyplývá, že $[A_1, A_2, A_3, A_4]_\lambda = [A_1, A_2, A_3]_\lambda$. Navíc lze určit dimenzi lineárního obalu souboru vektorů (viz následující definice)

$$\dim[A_1, A_2, A_3, A_4] = 3.$$

Věta: (**redukce lineárně závislého systému**) Je-li $x_1, \dots x_n$ lineárně závislý soubor vektorů z prostoru V potom lze některý z nich (označíme jej x_k) vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1} \dots x_n$ tj. $x_k \in [x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n]_\lambda$ a platí, že vynecháním lineárně závislého vektoru x_k se lineární obal nezmění

$$[x_1, \dots, x_n]_\lambda = [x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n]_\lambda$$

Poznámka: Výsledný systém $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ už nemusí být lineárně závislý.

Definice: Lineárně nezávislý systém vektorů $x_1, \dots, x_n$ takový, že generuje celý prostor V, tj. platí $[x_1, \dots, x_n]_\lambda = V$, nazýváme jeho bází. Počet prvků báze nazveme dimenzí prostoru V a označujeme jej $\dim V = n$.

Poznámka: Jestliže platí $V = [x_1, \dots, x_n]_\lambda$, pak lze každý vektor $x \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $x_1, \dots, x_n$.

Poznámka: Některé prostory nemají (konečnou) bázi. Jestliže neexistuje takové n, že každý $(n+1)$-členný soubor vektorů z V je lineárně závislý, pak prostor V nemá konečnou dimenzi a položíme $\dim V = \infty$. Pro nulový prostor $V = \{\Theta\}$ položíme $\dim V = 0$.

Příklady bází v jednotlivých prostorech

1. Prostor $\mathbb{R}^n$ má $\dim \mathbb{R}^n = n$ a existuje v něm standardní báze $e_1, e_2, \dots, e_n$ tvaru

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Prostor $\mathbb{R}^{m,n}$ má $\dim \mathbb{R}^{m,n} = mn$ a existuje v něm standardní báze $E_1, E_2, \dots, E_{mn}$ tvaru

$$\begin{aligned}
E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \\
E_n &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; E_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \\
E_{mn-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

3. Prostor $\mathcal{P}_n$ má $\dim \mathcal{P}_n = n$ a standardní báze $e_1, \dots, e_n$ má následující tvar

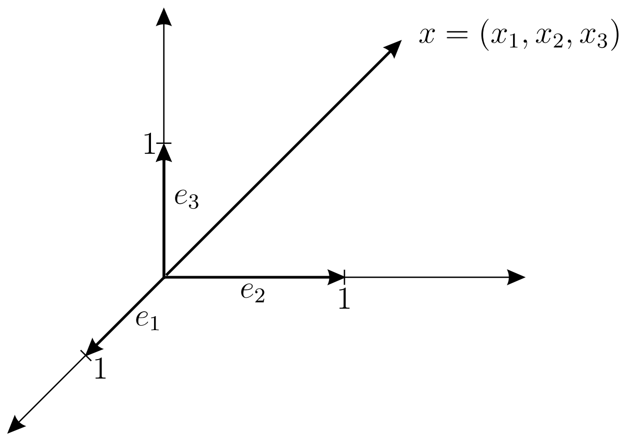
$$e_1(t) = 1, e_2(t) = t, \dots, e_n(t) = t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Libovolný polynom stupně nejvýše $n-1$ lze napsat jako lineární kombinaci

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1} e_k.$$

4. Prostory $\mathcal{P}$ a $C\langle a, b\rangle$ nemají konečnou dimenzi ($\dim \mathcal{P} = +\infty$ a $\dim C\langle a, b\rangle = +\infty$).

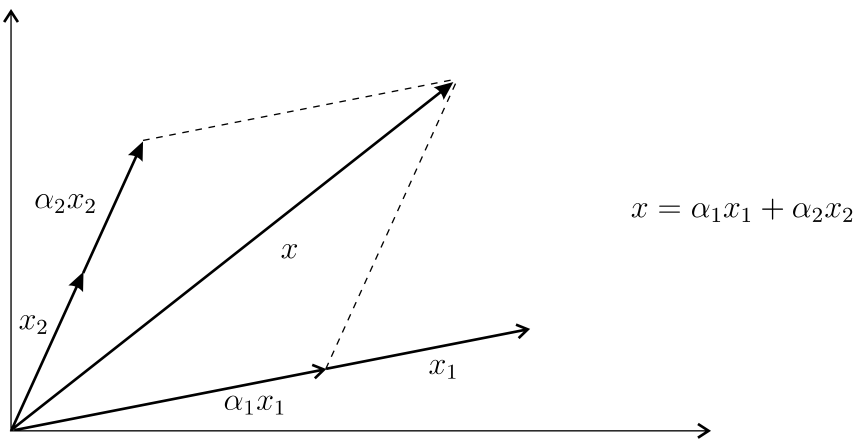
Příklad: (**Kartézský souřadný systém**) Každý vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ v třírozměrném euklidovském prostoru lze napsat jako lineární kombinaci vektorů standardní báze $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, pro kterou je navíc každá jeho složka rovna souřadnici daného vektoru v této bázi.



Obrázek 3.9:

Příklad: (**Křivočarý souřadný systém**) Každý vektor x v dvourozměrném euklidovském prostoru lze nakombinovat pomocí dvou navzájem různých nenulových vektorů x_1 x_2 tak, že platí $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ a tím lze i získat jeho souřadnice α_1, α_2 v bázi x_1, x_2, viz obr. 3.10.

Příklad: (**Jak zjistit souřadnice nějakého vektoru v bázi?**) Nechť x_1, x_2, x_3 je soubor vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$ a x je vektor z $\mathbb{R}^3$. Dokažte, že x_1, x_2, x_3 je báze a nalezněte souřadnice vektoru x v této bázi, je-li $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 1)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ a $x = (1, 0, 4)$.



Obrázek 3.10:

Lineární nezávislost ověříme obvyklým způsobem: úpravou matice, která je sestavena ze sloupců vektorů x_1, x_2, x_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z uvedeného postupu vyplývá, že vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně nezávislé a soubor x_1, x_2, x_3 je tedy bází $\mathbb{R}^3$. Je-li soubor x_1, x_2, x_3 bází, souřadnice α_1, α_2, α_3 nalezneme jako jednoznačné řešení soustavy

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

která po dosazení za jednotlivé vektory

$$\begin{aligned} (1,0,4) &= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,1) + \alpha_3(0,0,1) \\ (1,0,4) &= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

vede na soustavu tří rovnic o třech neznámých tvaru

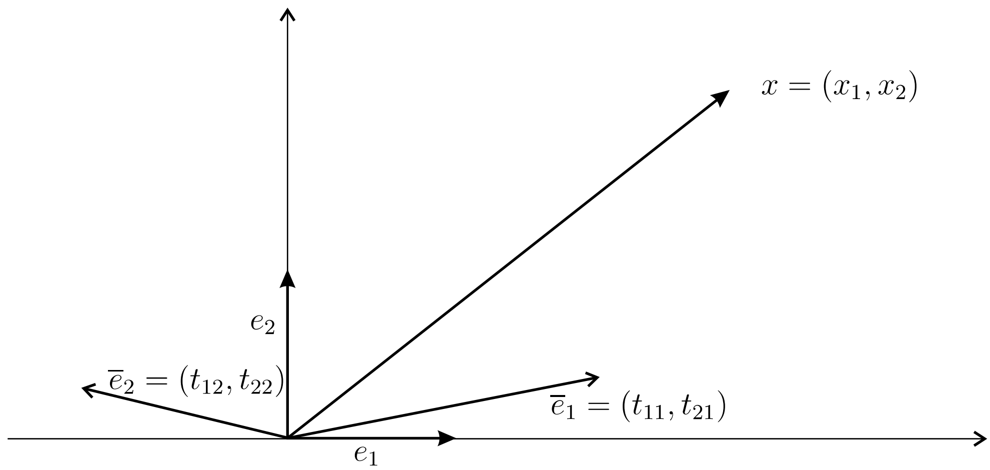
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 4 \end{aligned}$$

Pak postupujeme již známým standardním způsobem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

a nalezneme jednoznačné řešení $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$ a tedy vektor x má v bázi x_1, x_2, x_3 souřadnice postupně 2, -1, 3 a tedy platí $x = 2x_1 - x_2 + 3x_3$.

Příklad: (**Jak přepočítat souřadnice vektoru v jedné bázi na souřadnice v druhé bázi?**)



Obrázek 3.11:

Označme souřadnice vektoru x ve standardní bázi $e_1, \dots, e_n$ postupně $x_1, \dots, x_n$ (tedy $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$), souřadnice vektoru x v bázi $\overline{e}_1, \dots \overline{e}_n$ označme jako $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$. Pak můžeme psát

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \overline{e}_k, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nechť vektory báze $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ mají souřadnice ve standardní bázi (a tedy mají následující složky)

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \overline{e}_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}, \dots, \overline{e}_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vektor x pak lze napsat následujícím dvojím způsobem

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k>1}^{n} \overline{x}_k \overline{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k t_{ik} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} \overline{x}_k \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \end{aligned}$$

ze kterého vyplývá, že každou složku tohto vektoru x_i lze napsat jako lineární kombinaci jeho souřadnic v bázi $\overline{e}_1, \dots \overline{e}_n$ tvaru $x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}$ s koeficienty t_{ik}. Označíme-li matici $T = (t_{ik})$, pak souřadnice vektoru x v bázi $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ získáme řešením soustavy rovnic

$$T \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Konkrétně, jsou-li dány matice T (a tím i složky vektorů $\overline{e}_1, \dots \overline{e}_3$) a vektor x

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

pak získáme jeho souřadnice v bázi $\overline{e}_1, \dots \overline{e}_3$ pomocí vztahu $\overline{x} = T^{-1}x$, což lze interpretovat jako řešení soustavy s maticí T a vektorem pravé strany x anebo můžeme vypočítat inverzní matici T^{-1} a pak ji použít k výpočtu souřadnic jakéhokoliv vektoru (nejenom vektoru x)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-1} & 0 & 1 \end{array}\right), \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x} = T^{-1}x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektorové prostory se skalárním součinem

Definice: Vektorový prostor V se nazývá vektorovým prostorem se skalárním součinem, jestliže na něm navíc definovaná operace, která každé dvojici $x \in V$ a $y \in V$ přiřazuje skalár $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ tak, že platí

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in V$, přičemž $\langle x, x \rangle = 0$ právě když $x = \Theta$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pro každé x, y a $z \in V$

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in V$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$

4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ pro každé $x, y \in V$

Příklad: (Vektorové prostory se skalárním součinem) Prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^T y\,,$$

kde zápis $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ označuje vektor transponovaný s vektoru x.
Prostor $\mathbb{R}^{m,n}$ se standardním skalárním součinem: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Prostor $C\langle a, b\rangle : f \in C\langle a, b\rangle, g \in C\langle a, b\rangle$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Dříve definované prostory se stanou prostory se skalárním součinem, zavedeme-li operaci skalárního součinu s výše uvedenými vlastnostmi.

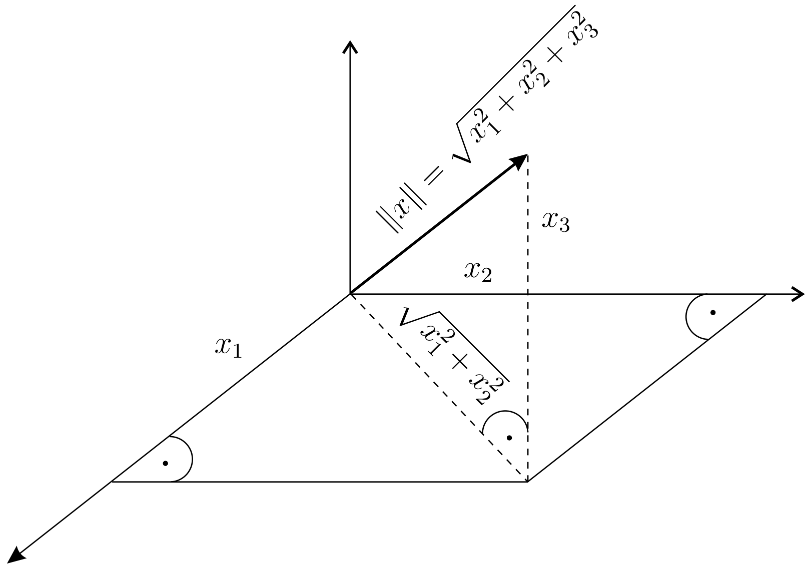
Definice: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pro každé $x \in V$ definujeme normu (velikost) vektoru x předpisem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Poznámka: Norma je korektně definována díky vlatnosti 1., podle které $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in V$. Norma je tedy nezáporně reálné číslo a představuje "délku" vektoru.

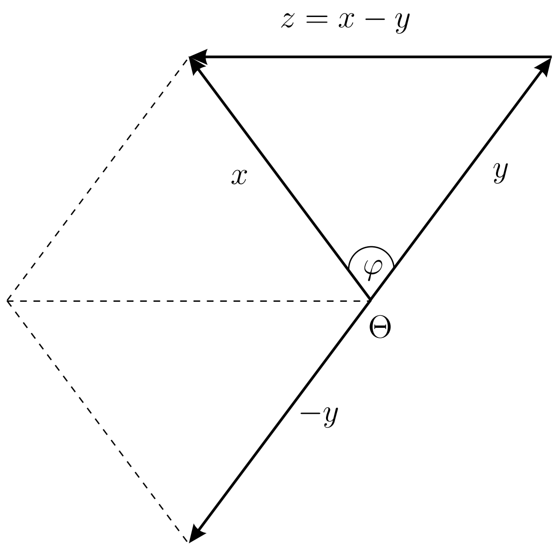
Příklad: Třírozměrný euklidovský prostor je vlastně prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

Příklad: V dvourozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ platí tzv cosinová věta:

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \langle z, z\rangle = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle\end{aligned}$$



Obrázek 3.12:



Obrázek 3.13:

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\|\cos\varphi$$

Definice: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $x \in V$, $y \in V$, $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta$. Pak úhel mezi vektory x a y je takové číslo $\varphi \in [0, \pi]$, pro které platí

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

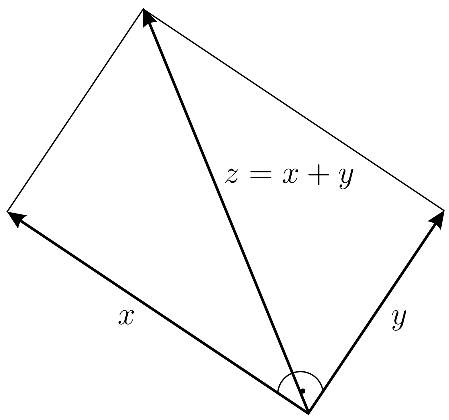
Definice: Vektory $x \in V$ a $y \in V$ se nazývají ortogonální (kolmé), jestliže platí, že $\langle x, y\rangle = 0$.

Věta: (Pythagorova): Nechť $x \in V$ a $y \in V$ jsou vektory, které jsou na sebe kolmé ($\langle x, y\rangle = 0$). Pak platí

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Důkaz: Toto tvrzení vyplývá z vlastností skalárního součinu

$$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$



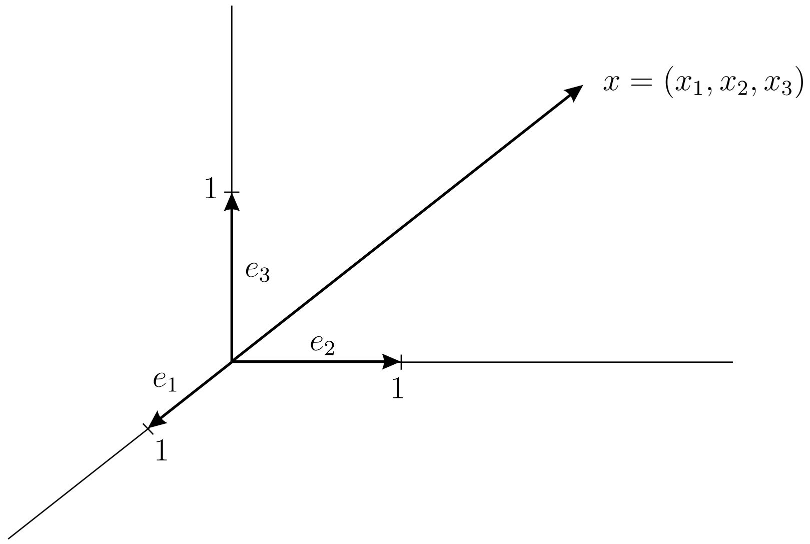
Obrázek 3.14:

Poznámka: Obecně platí trojúhelníková nerovnost

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

která předchází u pravoúhlého trojúhelníku v rovnost. Je to důsledek tzv. Schwarzovy nerovnosti $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Definice: Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je báze vektorového prostoru se skalárním součinem. Bázi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme ortogonální bází, pokud $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots n$. Bázi nazveme ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\|x_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$.



Obrázek 3.15:

Příklad: Prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem: standardní báze $e_1, \ldots, e_3$ je ortonormální bází. Platí totiž, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$, $\|e_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, 3$ $j = 1, \ldots 3$, a navíc

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ &= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3, \end{aligned}$$

a tedy $x_1 = \langle x, e_1 \rangle$, $x_2 = \langle x, e_2 \rangle$ a $x_3 = \langle x, e_3 \rangle$. Smyslem zavedení ortonormální báze kromě jiného je, že získáme jednoduché vzorce pro souřadnice vektoru v bázi (ta ovšem musí být ortonormální).

Věta: Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je ortonormální báze prostoru V a nechť $x \in V$ potom platí $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$.

Definice: Souřadnicím se říká Fourierovy koeficienty a vyjádření $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$ Fourierův rozvoj.

Důkaz: Nechť $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ je vyjádření vektoru x v bázi $x_1, \ldots, x_n$. Skalárním součinem s x_i zprava pro každé i dostáváme i-tou souřadnici α_i

$$\langle x, x_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, x_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_i$$

takže $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$.

Příklad: (**Fourierovy řady**) Uvažujme vektorový prostor reálných funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$. J.B. Fourier (1768-1830) byl první, kdo si všiml, že funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots$$

tvoří ortonormální systém ve $\langle -\pi, \pi \rangle$. Sestrojíme-li formální analogii vzorce z předchozí věty pro tento případ, dostaneme řadu

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx), \end{aligned}$$

kde

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx dx$$

Obecná spojitá funkce $f(x)$ je vyjádřena řadou sestávající z periodických funkcí ("kmitů" s periodou $2\pi/j$). Proto jsou Fourierovy řady vhodným nástrojem pro zpracování signálů (speciálně zvuku).