Třetí zápočtová písemka z MB101 - verze A (V. Kubáň)

20.11.2008

1. Ověřte všech 8 axiomů z definice vektorového prostoru a podmínky uzavřenosti na sčítání a násovení skalárem pro množinu P všech polynomů stupně maximálně 4 a minimálně 2. Operace sčítání a násobení skalárem jsou definováný normálně.

2. Množina M generuje vektorový podprostor v $\mathbb{R}^5$. Doplňte ji na bázi ortogonálními vektory (takovými, že jsou kolmý ke všem vektorům z množiny M). Doporučení: Najděte bázi podprostoru generovaného množinou M a pak najděte její ortogonální doplněk.

   $M = \{(-1,0,2,3,1),(2,1,-3,0,1),(3,2,-4,3,3),(0,1,-1,1,0),(3,-1,-1,0,3)\}$

3. Najděte $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ (a popište ho pomocí báze), kde f je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 4x_4 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

   Jsou podprostory $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ prostoru $\mathbb{R}^4$ ortogonální (je každý vektor z jednoho podprostoru kolmý se všemi vektory z druhého podprostoru)?

4. Najděte matici přechodu $T_{\alpha\beta}$ od báze β k bázi α a matici přechodu $T_{\beta\alpha}$ od báze α k bázi β. Nalezněte $[x]_\alpha$ a $[y]_\beta$, víte-li, že $[x]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ a $[y]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_\alpha$. Báze:

$$\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,1,0)\},$$

$$\beta = \{(0,1,1),(1,2,1),(1,1,1)\}.$$

5. Najděte matici $A_{\alpha\beta}$ lineárního zobrazení f v bazích α a β, kde báze jsou zadány v předchozím příkladu.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Třetí zápočtová písemka z MB101 – verze B (V. Kubáň)

20.11.2008

1. Ověřte všech 8 axiomů z definice vektorového prostoru a podmínky uzavřenosti na sčítání a násovení skalárem pro množinu M všech matic 3×3 tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$, kde a, b, c, d, e jsou nezáporná reálná čísla.
   Operace sčítání a násobení skalárem jsou definováný normálně.

2. Množina M generuje vektorový podprostor v $\mathbb{R}^5$. Doplňte ji na bázi ortogonálními vektory (takovými, že jsou kolmý ke všem vektorům z množiny M). Doporučení: Najděte bázi podprostoru generovaného množinou M a pak najděte její ortogonální doplněk.

   $M = \{(1, 1, -1, -1, 1), (-1, 0, 3, 1, 2), (3, 4, -1, -3, 6), (0, 1, -1, 0, 1), (-1, 4, -1, 1, 6)\}$

3. Najděte $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ (a popište ho pomocí báze), kde f je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

   Jsou podprostory $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ prostoru $\mathbb{R}^4$ ortogonální (je každý vektor z jednoho podprostoru kolmý se všemi vektory z druhého podprostoru)?

4. Najděte matici přechodu $T_{\alpha\beta}$ od báze β k bázi α a matici přechodu $T_{\beta\alpha}$ od báze α k bázi β. Nalezněte $[x]_\alpha$ a $[y]_\beta$, víte-li, že $[x]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ a $[y]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_\alpha$. Báze:

$$\alpha = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1), (-1, 1, 1)\},$$
$$\beta = \{(2, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}.$$

5. Najděte matici $A_{\alpha\beta}$ lineárního zobrazení f v bazích α a β, kde báze jsou zadány v předchozím příkladu.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -2x_1 \end{pmatrix}.$$

Třetí zápočtová písemka z MB101 - verze C (V. Kubáň)

20.11.2008

1. Ověřte všech 8 axiomů z definice vektorového prostoru a podmínky uzavřenosti na sčítání a násovení skalárem pro množinu F všech konstantních funkcí na celém $\mathbb{R}$. Operace sčítání funkcí je součet funkcí a násobení skalárem je definováno vynásobení funkce v každém bodě.

2. Množina M generuje vektorový podprostor v $\mathbb{R}^5$. Doplňte ji na bázi ortogonálními vektory (takovými, že jsou kolmý ke všem vektorům z množiny M). Doporučení: Najděte bázi podprostoru generovaného množinou M a pak najděte její ortogonální doplněk.

   $M = \{(0,1,-1,1,0),(-1,0,2,3,1),(-3,1,5,10,3),(2,1,-3,0,1),(3,2,-4,3,3)\}$

3. Najděte $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ (a popište ho pomocí báze), kde f je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

   Jsou podprostory $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ prostoru $\mathbb{R}^4$ ortogonální (je každý vektor z jednoho podprostoru kolmý se všemi vektory z druhého podprostoru)?

4. Najděte matici přechodu $T_{\alpha\beta}$ od báze β k bázi α a matici přechodu $T_{\beta\alpha}$ od báze α k bázi β. Nalezněte $[x]_\alpha$ a $[y]_\beta$, víte-li, že $[x]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ a $[y]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_\alpha$. Báze:

$$\alpha = \{(1,1,1),(2,1,1),(0,1,2)\},$$

$$\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,0)\}.$$

5. Najděte matici $A_{\alpha\beta}$ lineárního zobrazení f v bazích α a β, kde báze jsou zadány v předchozím příkladu.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ -2x_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Třetí zápočtová písemka z MB101 - verze D (V. Kubáň)

20.11.2008

1. Ověřte všech 8 axiomů z definice vektorového prostoru a podmínky uzavřenosti na sčítání a násovení skalárem pro množinu X všech polynomů stupně maximálně 3 s koeficienty v absolutní hodnotě menšími než 1000. Operace sčítání a násobení skalárem jsou definováný normálně.

2. Množina M generuje vektorový podprostor v $\mathbb{R}^5$. Doplňte ji na bázi ortogonálními vektory (takovými, že jsou kolmý ke všem vektorům z množiny M). Doporučení: Najděte bázi podprostoru generovaného množinou M a pak najděte její ortogonální doplněk.

   $$M = \{(0,1,-1,0,1), (-1,0,3,1,2), (-1,4,-1,1,6), (1,1,-1,-1,1), (2,3,0,-2,5)\}$$

3. Najděte $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ (a popište ho pomocí báze), kde f je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$.

   $$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

   Jsou podprostory $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$ prostoru $\mathbb{R}^4$ ortogonální (je každý vektor z jednoho podprostoru kolmý se všemi vektory z druhého podprostoru)?

4. Najděte matici přechodu $T_{\alpha\beta}$ od báze β k bázi α a matici přechodu $T_{\beta\alpha}$ od báze α k bázi β. Nalezněte $[x]_\alpha$ a $[y]_\beta$, víte-li, že $[x]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta$ a $[y]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_\alpha$. Báze:

   $$\alpha = \{(1,3,0), (0,1,-1), (0,0,1)\},$$

   $$\beta = \{(-1,2,1), (1,-2,0), (0,1,-1)\}.$$

5. Najděte matici $A_{\alpha\beta}$ lineárního zobrazení f v bazích α a β, kde báze jsou zadány v předchozím příkladu.

   $$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$