1) **Je množina W podprostor v R^3?**
   a) **$W = \{[2k+l, k-l, 3k+l];\ k,l \in R\}$**
   b) **$W = \{[1, 2r, 3r];\ r \in R\}$**

   Řešení
   a) pro všechny u, v ϵ W, aϵR musí platit
   - u+v ϵ W

   u = (2s+t,s-t,3s+t), v = (2r+p,r-p,3r+p)
   u+v = (2s+2r+t+p, s+r-t-p, 3s+3r+t+p)
   = (2(s+r)+(t+p),(s+r)-(t+p), 3(s+r)+(t+p)) když s+r = k, t+p = l, u+v = (2k+l,k-l,3k+l) ϵW
   - *a.u*ϵW

   u =(2s+t,s-t,3s+t)
   a.u = (a(2s+t), a(s-t),a(3s+t))=(2as+t,as-at,3as+at) když as = k, at = l
   a.u = (2k+l,k-l,3k+l)
   W je vektorový podprostor
   b) tato množina neobsahuje nulový vektor [0,0,0] – tzn. hned můžeme říci, že to není podprostor

2) **Urči lineární obal**
   a) **vektorů (1,0,-1), (-2,1,1), (1,2,3), (3,-2,1)**

   [Span< $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ **>]**

   b) **matic** $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) **Urči obraz a řádkový prostor matice** $\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&1\\-1&3&-2\end{pmatrix}$

4) **Urči jádro matice**

   a) $\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&1&3&2\\3&3&-1&6\end{pmatrix}$ **[Span<** $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ **>]**

   b) $\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&1&3&2\\3&3&0&6\end{pmatrix}$ **[Span<** $\begin{pmatrix}-3\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ **>]**

5) **Jedná se o bázi R^4? Pokud ne, tak přidejte vektory tak, aby to báze byla.**
   a) **{(-3,2,0,4), (1,5,6,4), (1,1,1,1)}** [přidáme (0,0,1,0),(0,0,0,1)]
   b) **{(-1,1,0,0), (2,-3,1,0), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)}** [přidáme (0,0,0,1)]

BÁZE prostoru R^n = n lineárně nezávislých vektorů

6) **Jedná se o bázi R^3?**
   a) **(1,2,3), (-1,0,2), (0,2,-1)** [ano]
   b) **(1,2,3), (3.0.-1), (-2,2,4)** [ne, je třeba přidat (0,0,1)]

7) **Najděte souřadnice vektoru v v bázi w vektorového prostoru V:**
   a) **v = (2,1,1), w={(2,7,3), (3,9,4), (1,5,3)}** $[<-5;4;0>_w]$
   b) **v = (-4,8,0), w = {(1,2,3), (3,-2,1), (-2,0,0)}** $[<1;-3;-2>_w]$

8) **Lze z vektorů (0,3,-1), (1,1,1), (2,-2,1), (0,1,0) vybrat bázi R^3?** [ano, např:(0,3,-1), (1,1,1), (0,1,0)]

9) Určete matici přechodu od báze u k bázi v, u = {(3,1),(4,1)}, v = {(1,2),(1,1)}

T = MATICE PŘECHODU OD U → V
T = V^{-1} * U
T * (souřadnice vektoru v bázi u) = (souřadnice vektoru v bázi v)

Řešení:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = V^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

T je matice přechodu od báze u k bázi v

Využijeme to např. když máme vektor (2,1) ve standartní bázi e={(1,0),(0,1)}
V bázi u jsou souřadnice vektoru: $(2,-1)_u$ (protože 2.(3,1)-1.(4,1)=(2,1))
A nyní chceme vektor $(2,-1)_u$ převést do báze v:
$T.(\text{vektor})_u = (\text{vektor})_v$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$(2,-1)_u = (-1,3)_v$
(pro kontrolu, když převedeme vektor $(-1,3)_v$ do stand. báze = -1.(1,2)+3.(1,1)=(2,1))

10) Najděte matici přechodu od báze M k bázi N
M = {(2,1,3), (-3,1,-2), (5,-2,4)}, N = {(3,1,0), (1,1,0), (0,3,1)}

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & \frac{19}{2} \\ -13 & 12 & -\frac{47}{2} \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

11) Pomocí matice přechodu najděte souřadnice vektoru u v bázi N, pokud znáte:
M = {(2,1,3), (-3,1,-2), (5,-2,4)}
N = {(-2,0,1), (-1,1,1), (1,-2,0)}
$\{u\}_M$ = (0,2,-1)

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -4 \\ \frac{17}{3} & -\frac{13}{3} & 8 \\ \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{26}{3} & -\frac{50}{3} & -\frac{31}{3} \end{bmatrix}$$

12) Najděte matici přechodu ve vektorovém prostoru P_2 (tzn. polynomy největšího stupně 2) od báze M k bázi N.
M = {x^2+3, x-1, 3}
N={x^2+x, x^2+1, x+1}

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

13) Najděte matici přechodu od báze M k bázi N (ve vektorovém prostoru všech matic 2 x 2 nad tělesem reálných čísel)
M = {A_1, A_2, A_3, A_4}
N = {B_1, B_2, B_3, B_4}

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lineární zobrazení – strana 88 přednášky MB 101 (nastudovat individuálně) + řešené příklady na demo cvičení

Euklidovský prostor

Vektorový prostor se skalárním součinem u.v = u_1v_1+ … + u_nv_n je euklidovský prostor.

Je zde definována délka vektoru a úhel mezi vektory.

Ortogonální vektory = jsou na sebe kolmé u.v = 0

Ortogonální doplněk k Y v R^n = množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory v Y
př.: V = Span<(0,1,0), (0,0,1)>

1) **Jsou následující podprostory R^4 kolmé?**
   U = Span<(1,2,3,0), (1,-1,0,0)>
   V = Span<(2,2,-2,5)>

   Řešení:
   musí být na sebe kolmé vektory báze
   (1,2,3,0).(2,2,-2,5) = 2+4-6 = 0
   (1,-1,0,0).(2,2,-2,5) = 2-2 = 0
   Tzn. jsou na tebe kolmé

2) **Určete ortogonální doplněk V = Span<(1,0,2), (1,-1,2)>**

3) **Určete ortogonální doplněk X = Span<(1,-1,1,0,0), (1,0,1,0,1), (1,1,0,-1,1)>**
   [Span<(1,0,-1,1,0),(0,-1,-1,0,1)>]

Fundamentální podprostory matice

opět určujeme jádro, řádkový prostor, sloupcový prostor

4) **Určete Ker A, Im A, Ker A^T, Im A^T**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(řešení ve skriptech, str. 104)

5) **Určete Ker A, Im A, R(A)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

[Ker A =Span< $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ >, Im A = Span< $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ >,
R(A)= Span<(1,1,-1,2),(-1,0,1,3),(1,2,0,4)>]

Obecné vektorové prostory se skalárním součinem

Zobrazení V x V do R nazýváme skalární součin na V, pokud má následující vlastnosti:

a) pozitivní definitnost
   <u,u> > 0
   <u,u>= 0 právě když u = 0
b) symetrie
   <u,v> = <v,u>
c) linearita
   <au+bv,w> = a<u,w> + b<v,w>

Skalární součin definuje normu (délku) vektoru $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Euklidovská norma $|u|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$

Frobeniova norma $|A|_F = \sqrt{s}$, s = součet druhých mocnin všech prvků v matici

Problém nejmenších čtverců

- používá se pro nalezení interpolačního polnomu (lineární, kvadratický, … atd.)
- máme určité hodnoty, naměřená data a chceme k tomu odpovídající rovnici
- systém nemá řešení, my hledáme x jehož hodnota Ax je co nejblíže b

$A^TAx = A^Tb$

1) **Najděte přibližné řešení soustavy**

$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - 2x_2 = 2$
$3x_1 + x_2 = -1$
$2x_1 - x_2 = 2$

Řešení:
kdybychom se snažili soustavu vyřešit … jako dříve, zjistíme, že nemá řešení
my chceme přibližné řešení, proto použijeme vzorec
$A^TAx = A^Tb$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{4}{15}$$

$$x_2 = -\frac{6}{7}$$

Lineární aproximace – metoda se nazývá lineární regrese, snažíme se vytvořit podle zadaných dat lineární funkci, neboli přímku procházející danými body, y = kx + q, hledáme k, q

Kvadratická aproximace – nyní chceme daty proložit parabolu, $y = ax^2 + bx + c$, hledáme a, b, c

2) **Určete regresní přímku udávající závislost výšky na věku dítěte**

výška (cm)	**50**	**53**	**57**	**65**
věk (měsíců)	**0**	**1**	**3**	**6**

Řešení:
Hledáme fci y = kx + q, tzn. q a k
y = výška (závislost výšky) , x = věk

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 50 \\ 53 \\ 57 \\ 65 \end{pmatrix}$$

dosadíme do vzorce $A^T Ax = A^T b$ a po úpravách získáme:

$$\begin{pmatrix} 46 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 614 \\ 225 \end{pmatrix}$$

dopočítáme buď přes inverzní matici nebo přes eliminaci
k = 2,45
q = 50,12
tedy hledaná rovnice je y = 2,45 x + 50,12
(čím více budeme mít dat, tím více bude rovnice přesná)

3) **Pomocí nejmenších čtverců určete kvadratickou aproximaci dat: [0,1], [1,6], [2,21], [3,45]**

[Návod: tzn. máme zadány dvojice bodů [x,y] a máme určit rovnici $y = ax^2+bx+c$, postupujeme jako v předchozím příkladě, pouze za x tentokrát dosazujeme vektor (a,b,c))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 21 \\ 45 \end{pmatrix}$$

… hledaná funkce bude mít tvar: $y = 4{,}75x^2 + 0{,}45x + 0{,}95$]

ortogonál ní množina vektorů = každý vektor z množiny je kolmý na zbývající vektory z této množiny
ortonormální množina vektorů = je ortogonální a navíc velikost každého vektoru je rovna jedné
ortogonální matice : $A^T = A^{-1}$ (neboli její sloupce tvoří ortonormální množinu)

4) **Určete zda množina M = {(1,1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2)} je ortogonální nebo ortonormální. (nebo nemusí být ani jedno)**

[všechny vektory jsou navzájem kolmé, ale velikost všech není rovna jedné, proto je množina ortogonální]

5) **Rozhodněte, zda je matice ortogonální: A =** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

[zjistíme, jestli platí $A^T = A^{-1}$, ano platí , takže je ortogonální]

6) **Rozhodněte, zda je matice ortogonální: A =** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

[je ortogonální]

Projekce vektoru na podprostor

Určíme **ortonormální** bázi podprostoru a potom projekce p:
p = <v,u$_1$>.u$_1$ + <v,u$_2$>.u$_2$ + … atd

vzdálenost vektoru u od podprostoru W = vzdálenost vektoru u od jeho projekce = $v(u,W) = |u - p|$

úhel α mezi vektorem u a podprostorem W určíme: $\cos\alpha = \dfrac{|p|}{|u|}$

GramSchmidtův proces – pomocí něj nalezneme ortonormální bázi

$$p_k = \frac{\langle u_{k+1}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 + \cdots + \frac{\langle u_{k+1}, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle}\cdot v_k.$$

$v_1 = u_1$

$$\boxed{v_{k+1} := u_{k+1} - p_k} = u_{k+1} - \frac{\langle u_{k+1}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 - \cdots - \frac{\langle u_{k+1}, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle}\cdot v_k$$

$$w_1 := \frac{1}{||v_1||}\cdot v_1,\ \ldots,\ w_n := \frac{1}{||v_n||}\cdot v_n.$$

1) **Převeďte tuto bázi {(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)} na ortonormální bázi prostoru R^3.**

Řešení:
$v_1 = u_1 = (0,1,1)$

$$v_2 = u_2 - p_1 = (1,0,1) - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1),(0,1,1)\rangle}{\langle (0,1,1),(0,1,1)\rangle}(0,1,1) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) = (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$v_3 = u_3 - p_2 = (1,1,0) - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = (1,1,0) - \frac{\langle (1,1,0),(0,1,1)\rangle}{\langle (0,1,1),(0,1,1)\rangle}(0,1,1) - \frac{\langle (1,1,0),(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle}{\langle (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle}(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) =$$

$$(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{3}(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$$

a ještě provedeme normalizaci (w)

$$w_1 = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{0+1+1}} = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w_2 = \frac{(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{6}},\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$$

$$w_3 = \frac{(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

a hledaná ortonormální báze je (w_1, w_2, w_3)

2) Najděte kolmou projekci vektoru v = (1,2,3) na podprostor W = Span <(1,0,0), (0,1,0)>

Řešení:
Protože podprostor W je již zadán ortonormální bází (to si ověřte),
použijeme rovnou vzorec
$p = \langle v,u_1\rangle.u_1 + \langle v,u_2\rangle.u_2 = \langle(1,2,3),(1,0,0)\rangle.(1,0,0)+\langle(1,2,3)(0,1,0)\rangle.(0,1,0)=(1,2,0)$

3) Určete projekci vektoru x na podprostor W:
x = (2,-2,3)
W = Span<(1,1,-1), (2,-1,0)>

[(3/2, -3, 3/2)]

4) Určete kolmý průmět vektoru u = (0,0,7) na podprostor W generovaný vektory (1,2,1), (-2,1,1). Dále určete vzdálenost vektoru u od podprostoru W a také úhel mezi vektorem a podprostorem W.

[p=(-1,3,2), vzdálenost = $\sqrt{35}$, úhel: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$]

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

vlastní číslo matice A se značí λ a je to takové číslo, pro které existuje alespoň jeden vektor u tak, že platí: A.u = λ.u
vektor u se nazývá **vlastní vektor** matice A příslušející číslu λ
Pro různé čísla **λ** jsou vektory lineárně nezávislé.
Pro jedno **λ** vyjít vice vektorů, potom se množina těchto vektorů označuje jako Eigen (**λ)** (=Span<dané vektory>).

Matice A je singularní, když existuje alespon jedno číslo **λ** rovno nule.
Pokud žádné číslo **λ** není rovno nule, potom je matice regulární.

Když je matice A regulární a má vlastní číslo **λ**, potom inverzní matice k matici A má vlastní číslo 1/**λ**.

Matice A a transponovaná matice k matici A mají stejné vlastní hodnoty.

1) Názorně:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vlastnímu číslu -1 přísluší vektor u, tzn. zkusíme vypočítat A.u = λ.u (a to same pro vl. č. 2, k němu přísluší vektor v)

Vlastní čísla vypočítáme z **charakteristické rovnice:** $\left|A - \lambda I\right| = 0$
dále platí:

det A = $\lambda_1 . \lambda_2 . \ldots . \lambda_n$
tr A = $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ (stopa, tj. součet prvků na hlavní diagonále)

Algebraická násobnost čísla **λ** = násobnost **λ** jako kořene charakteristické rovnice
Geometrická násobnost čísla **λ = dim (Eigen(λ))**

2) Najděte vlastní čísla a vektory matice A. Určete determinant matice, stopu matice a násobnosti vlastních čísel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3) **Najděte vlastní čísla a vektory daných matic**: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{l} A: \lambda_1 = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; B: \lambda_1 = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_{2,3} = 1, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C: \lambda_1 = 2 + 3i, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 3i \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 - 3i, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 3i \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

Diagonalizovatelná matice = čtvercová matice A řádu n, pro kterou existuje diagonální matice D a regulární matice P tak, že platí: $A = P. D. P^{-1}$ (neboli $D = P^{-1}. A. P$)

Nalezení matice D a P se nazývá diagonalizace A. (to lze pokud má matice n vlastních vektorů)
Matice P se skládá z lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A a matice D je diagonální a na diagonále jsou vlastní čísla matice A.

4) **Nalezněte diagonalizaci matice** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Řešení:
Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

$$\lambda_1 = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Do matice D – na úhlopříčku poskládáme vlastní čísla.
Do matice P vložíme vlastní vektory ve stejném pořadí jako vlastní čísla.

5) **Nalezněte diagonalizaci matice** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

6) **Pomocí diagonalizace matice A určete A^{50}.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 + 3.2^{50} & 2^{50} \end{pmatrix} \right]$

Cayley-Hamiltonova věta:
Každá matice A je kořenem svého charakteristického polynomu.

7) **Pomocí Cayle-Hamiltonovy věty vypočtěte A^2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Řešení:
Zjistíme si charakteristický polynom. (do charakt. rovnice dosadíme matici A, vyjádříme si A^2 a vypočítáme)

$\lambda^2 - 6\lambda + 11$

$A^2 - 6A + 11 = 0$

$A^2 = 6A - 11 = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$

8) **Pomocí Cayle-Hamiltonovy věty vypočtěte A^3.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 46 & -38 & 19 \\ 38 & -30 & 19 \\ 38 & -38 & 27 \end{pmatrix}$

U symetrických matic A ještě určujeme TYP, tzn. jestli je:
pozitivně definitní – všechna vlastní čísla jsou kladná
pozitivně semidefinitní – všechna vlastní čísla jsou kladná nebo nula
negativně definitní – všechna vlastní čísla jsou záporná
negativně semidefinitní – všechna vlastní čísla jsou záporná nebo nula

9) **Určete typ symetrických matic:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

[A poz.def., B neg. def., C poz.semi., D neg. semi]