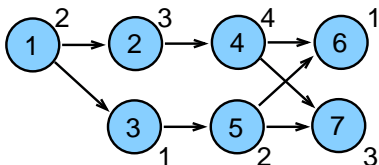


PB165 Grafy a sítě: Plánování projektu

Plánování projektu

- Základní problém **plánování projektu**
 - precedenční podmínky
 - paralelní stroj s **neomezeným počtem strojů**
 - minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
 - relativně jednoduché na řešení: metoda kritické (nejdelší) cesty
princip: nalezneme kritickou cestu a ta určuje makespan



- Rozšíření: **variabilní doba trvání**
 - doba trvání úlohy spojena s cenou provádění
 - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh

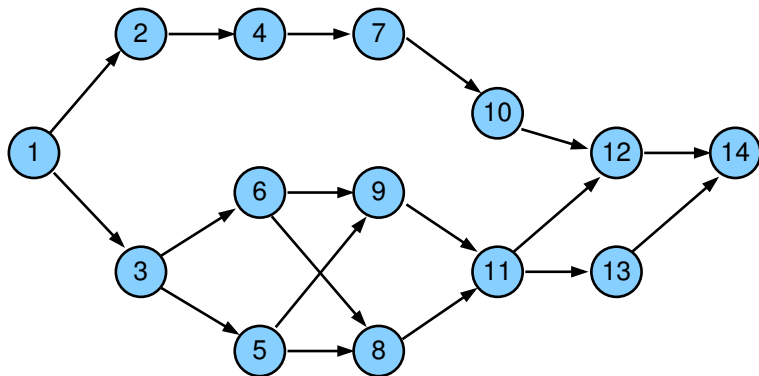
Popis problému

- Popis problému
 - paralelních stroj
 - n úloh s precedenčními omezeními
 - doba provádění p_j
 - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
- $P_\infty | prec | C_{max}$ $m \geq n$ metoda kritické cesty
- $P_m | prec | C_{max}$ $2 \leq m < n$ NP úplný problém
- Značení
 - S'_j nejdřívější startovní čas úlohy j
 - $C'_j = S'_j + p_j$ nejdřívější koncový úlohy j
 - S''_j nejpozdější startovní čas úlohy j
 - C''_j nejpozdější koncový čas úlohy j
 - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j
 - $\forall k \in Prec_j$ všechny úlohy k , které předcházejí úlohu j
 - $\forall j : k \in Prec_j$ všechny úlohy j , které následují úlohu k

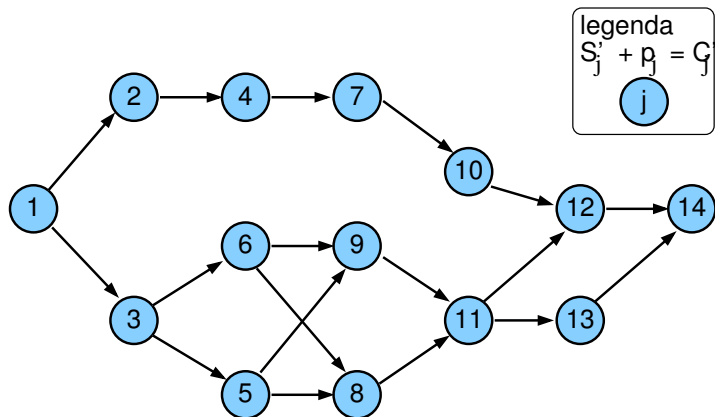
- Popis algoritmu pro nalezení **kritické cesty**
 - **dopředná procedura**
 - start v čase 0
 - výpočet **nejdřívějšího startovního času** každé úlohy
 - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
 - **zpětná procedura**
 - start v čase rovném *makespan*
 - výpočet **nejpozdějšího startovního času**, aby byl realizován tento *makespan*
- **Úloha s rezervou (*slack job*)**
 - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
 - úloha, jejichž nejdřívější startovní čas menší než nejpozdější startovní čas
- **Kritická úloha**
 - úloha, která nesmí být odložena
 - úloha, jejíž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu start. času
- **Kritická cesta**
 - množina kritických úloh
 - řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase C_{max}

Kritická cesta: zadání příkladu

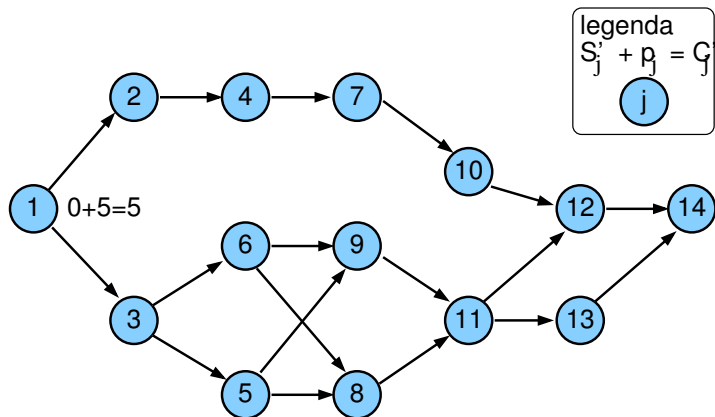
| | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|----|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| p _j | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |



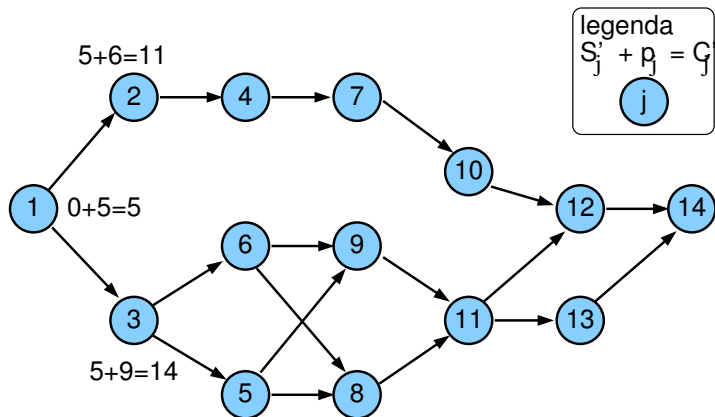
Příklad: dopředná procedura



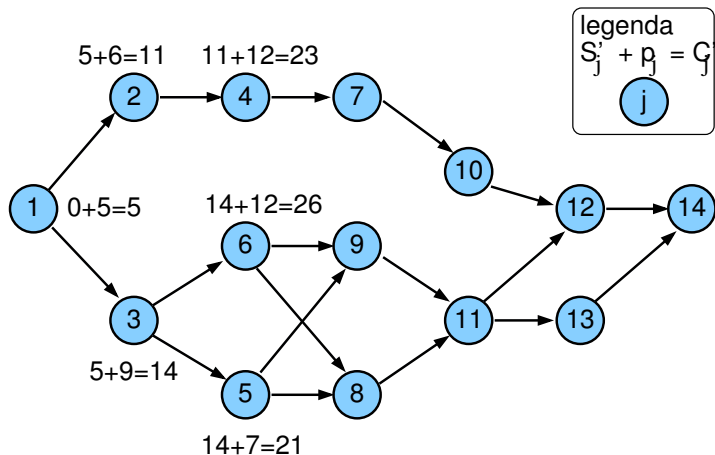
Příklad: dopředná procedura



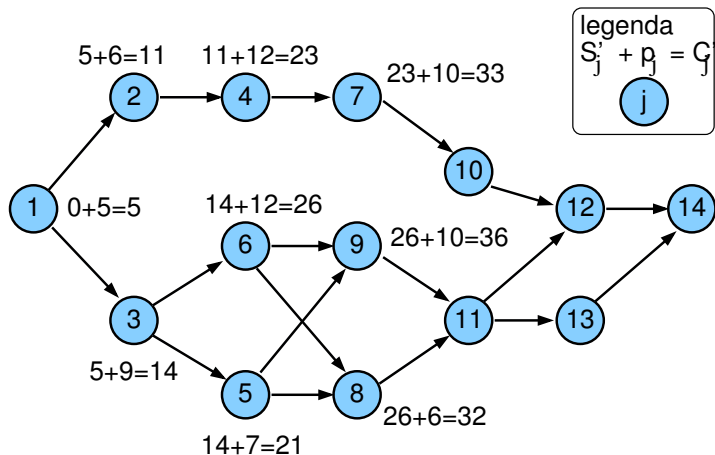
Příklad: dopředná procedura



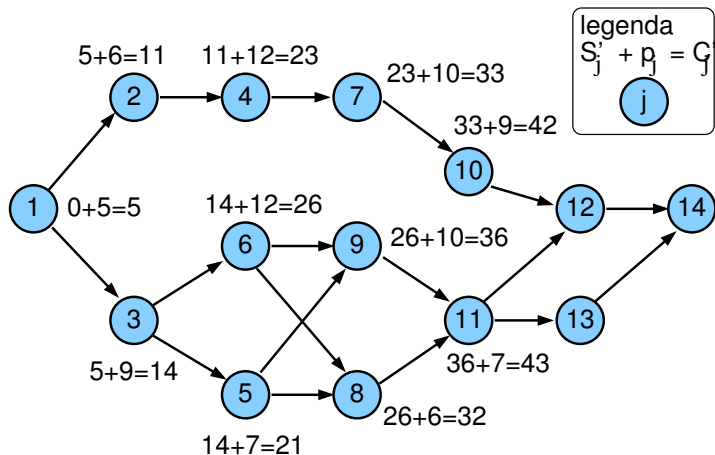
Příklad: dopředná procedura



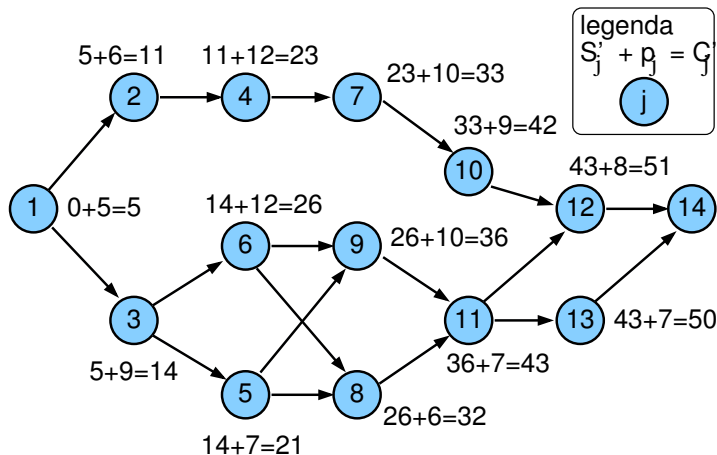
Příklad: dopředná procedura



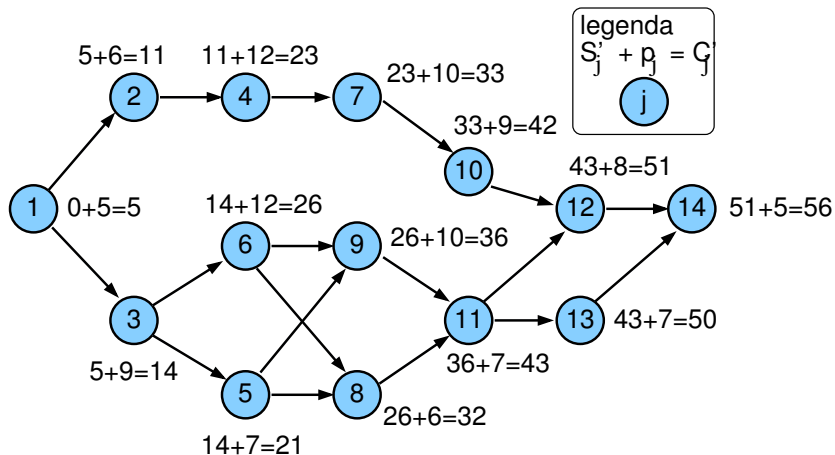
Příklad: dopředná procedura



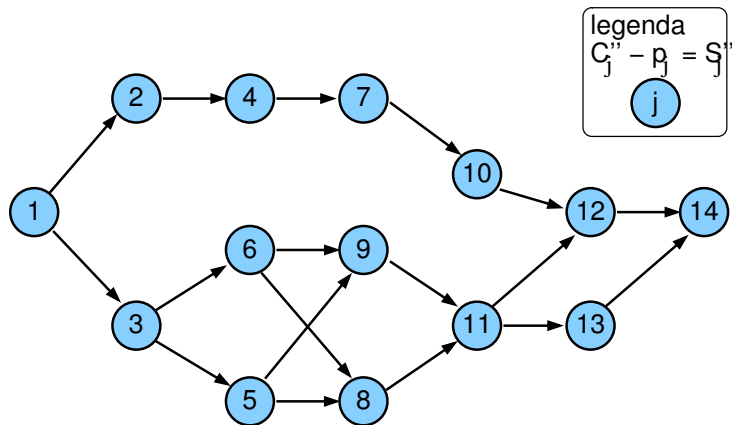
Příklad: dopředná procedura



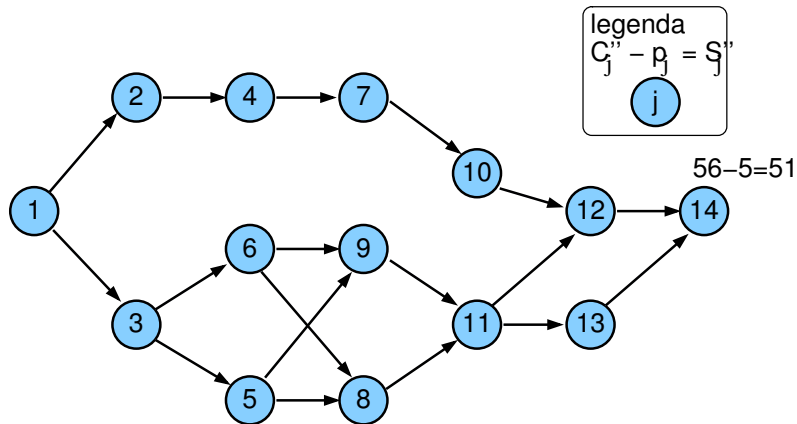
Příklad: dopředná procedura



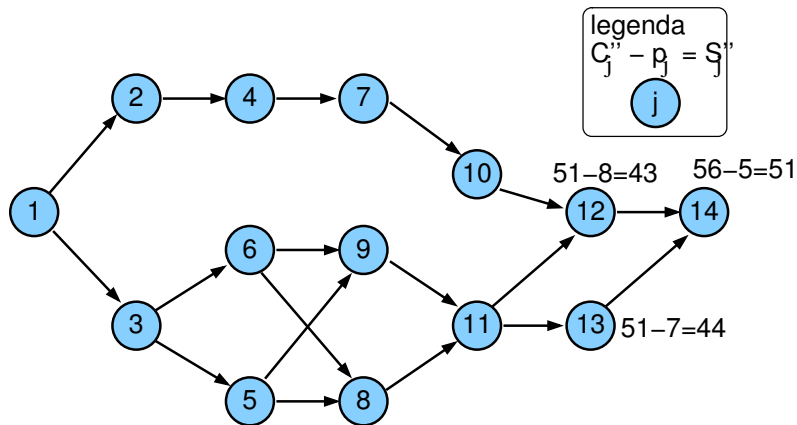
Příklad: zpětná procedura



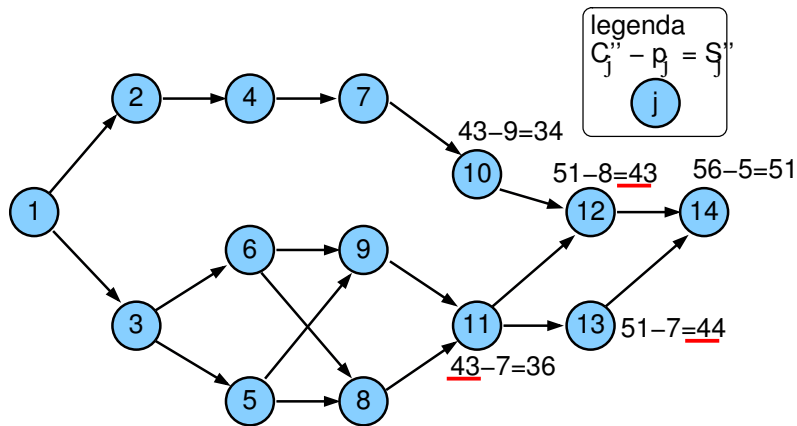
Příklad: zpětná procedura



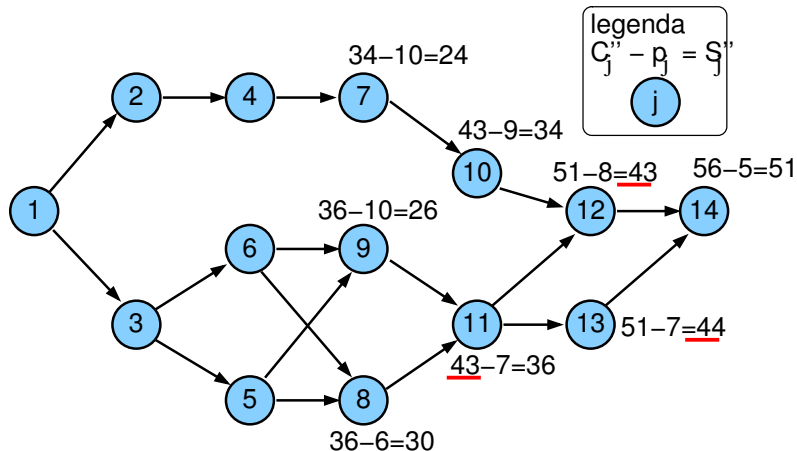
Příklad: zpětná procedura



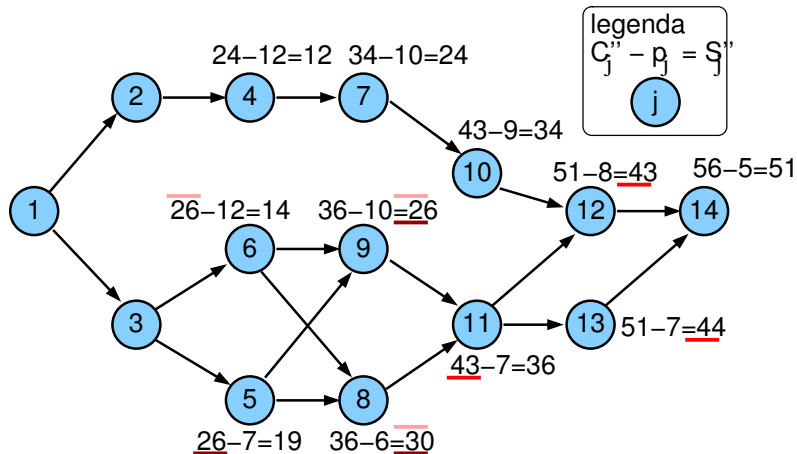
Příklad: zpětná procedura



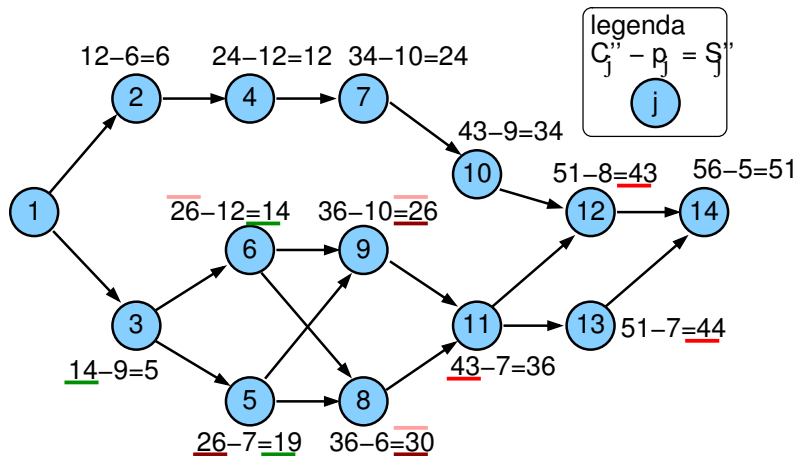
Příklad: zpětná procedura



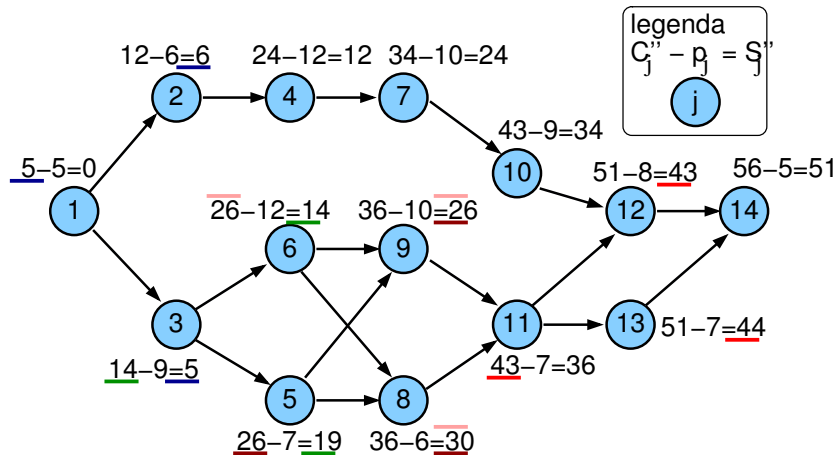
Příklad: zpětná procedura



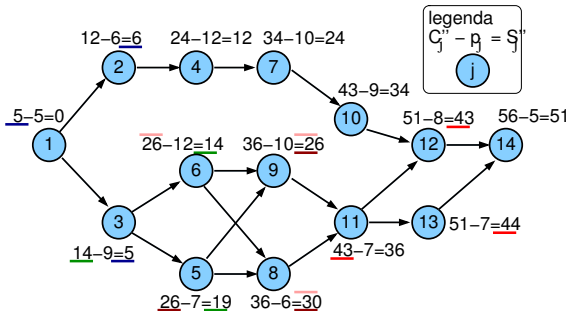
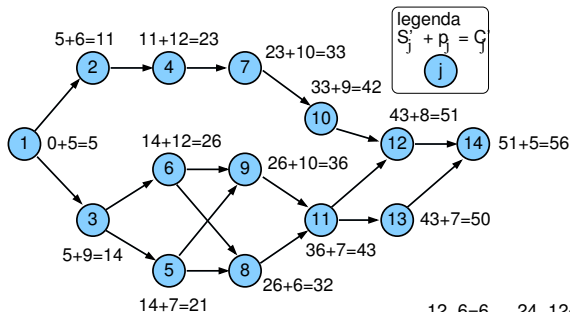
Příklad: zpětná procedura



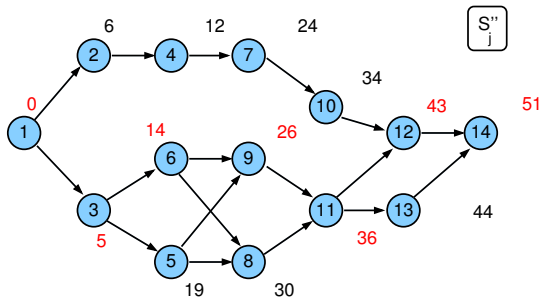
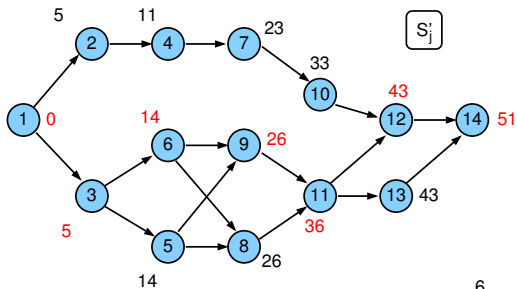
Příklad: zpětná procedura



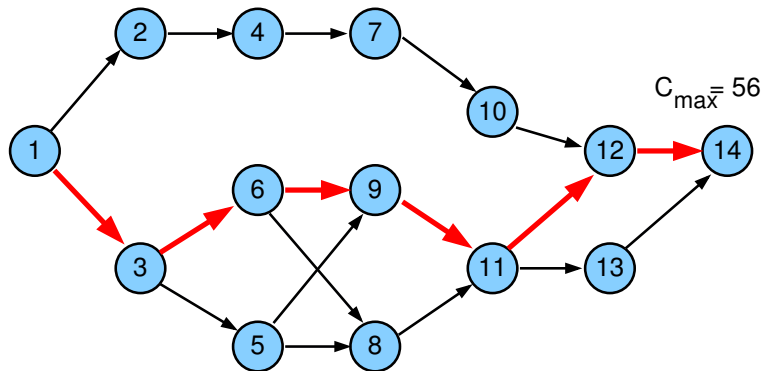
Výsledky dopředné a zpětné procedury



Porovnání S'_j a S''_j

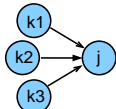


Kritická cesta



1 Dopředná procedura

- 1 $t = 0$
- 2 pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
- 3 vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :

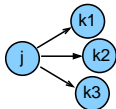


$$S'_j = \max_{\forall k \in \text{Prec}_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

- 4 optimální *makespan* je $C_{\max} = \max(C'_1, \dots, C'_n)$

2 Zpětná procedura

- $t = C_{\max}$
- pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{\max}, S''_j = C_{\max} - p_j$
- vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :



$$C''_j = \min_{\forall k: j \in \text{Prec}_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

- ověř, že $0 = \min(S''_1, \dots, S''_n)$

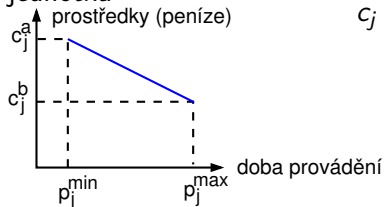
- ① Jaká je grafová reprezentace rozvrhovacího problému zadaného tabulkou:

| úloha | doba trvání | předchůdci |
|-------|-------------|------------|
| 1 | 1 | - |
| 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 |
| 4 | 4 | 2,5,6 |
| 5 | 5 | 1,2 |
| 6 | 2 | 3 |
| 7 | 4 | - |
| 8 | 1 | 7,9 |
| 9 | 5 | 4 |
| 10 | 2 | 8 |

- ② Nalezněte kritickou cestu v tomto grafu.
- ③ Jaký má tento rozvrh makespan?
- ④ Existují v problému úlohy s rezervou? Pokud ano, uveďte o které úlohy se jedná.

Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat **variabilní dobu trvání úloh**
 - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- **Lineární cena**
- Doba trvání $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- **Marginální cena:** cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku



$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$

⇒ cena provádění úlohy j po dobu p_j : $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

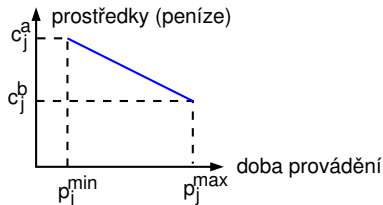
Cena za provádění projektu

- **Fixní režijní náklady c_0**
na časovou jednotku doby provádění projektu
- **Cena $F(p_j)$ za provádění projektu**
 - při době provádění úloh p_jurčena jako součet
 - ceny za provádění všech úloh
 - fixních režijních nákladů

celkem: $C_{\max}c_0$

$$F(p_j) = C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j))$$

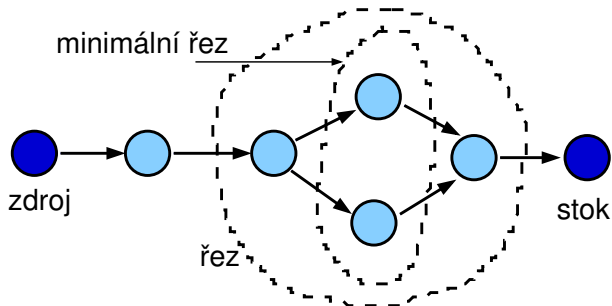
- Cíl: $\forall j$ nalézt p_j a S_j tak, aby byla $F(p_j)$ minimální



- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- Kompromisní heuristika mezi časem a cenou
 - dobrá kvalita rozvrhu
 - použitelné i pro nelineární cenu
- Další přístupy: formulace lineárního programování
 - systém lineárních nerovnic s lineárním optimalizačním kritériem
 - simplexová metoda
 - optimální rozvrh
 - nelineární verze obtížně řešitelné

Kompromisní heuristika mezi časem a cenou

- Počáteční uzel: zdroj
- Koncový uzel: stok
- Řez: množina uzlů, jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
- Minimální řez: vrácení libovolného uzlu z min. řezu do grafu znovu spojí zdroj a stok



Kompromisní heuristika: příklad

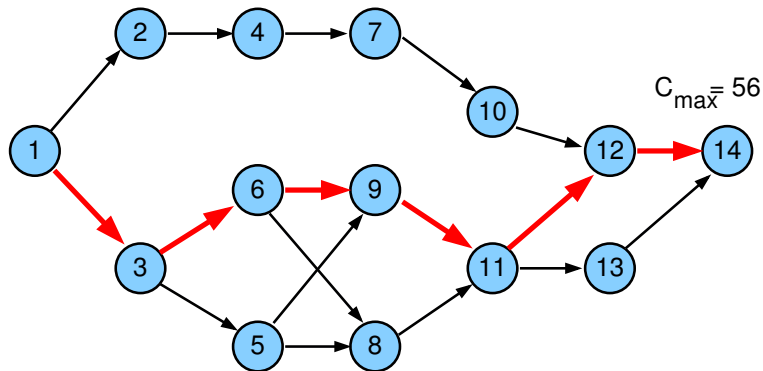
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| p_j^{\max} | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |
| p_j^{\min} | 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 9 | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| c_j^b | 20 | 25 | 20 | 15 | 30 | 40 | 35 | 25 | 30 | 20 | 25 | 35 | 20 | 10 |
| c_j | 7 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 8 |

fixní režijní náklady na časovou jednotku $c_0=6$

Algoritmus kompromisní heuristiky

- 1
 - Nastav doby provádění na jejich maximum: $p_j = p_j^{max}$
 - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
 - Zkonstruuuj graf G_{CP} kritických cest
- 2
 - Urči všechny minimální řezy v G_{CP}
 - Najdi řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum:
 $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
 - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
- 3
 - Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
 - Vyber minimální řez s nejnižší cenou
 - Jestliže je menší než fixní režijní náklady c_0 za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
- 4
 - Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
 - Urči novou množinu kritických cest
 - Reviduj graf G_{CP} a běž na krok 2

Příklad (pokračování): maximální doba provádění



Kompromisní heuristika: příklad

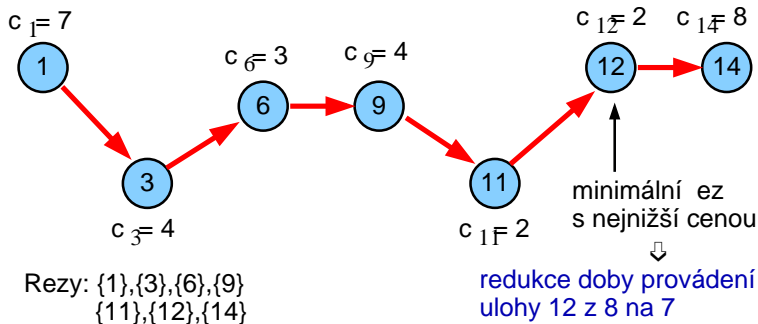
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| p_j^{\max} | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |
| $c_0=6$ p_j^{\min} | 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 9 | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| c_j^b | 20 | 25 | 20 | 15 | 30 | 40 | 35 | 25 | 30 | 20 | 25 | 35 | 20 | 10 |
| c_j | 7 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 8 |

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

$$\begin{aligned}F(p_j^{\max}) &= C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j^{\min})) = \\&= C_{\max}c_0 + \sum_j c_j^b = \\&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\&\quad + 30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\&= 336 + 350 = 686\end{aligned}$$

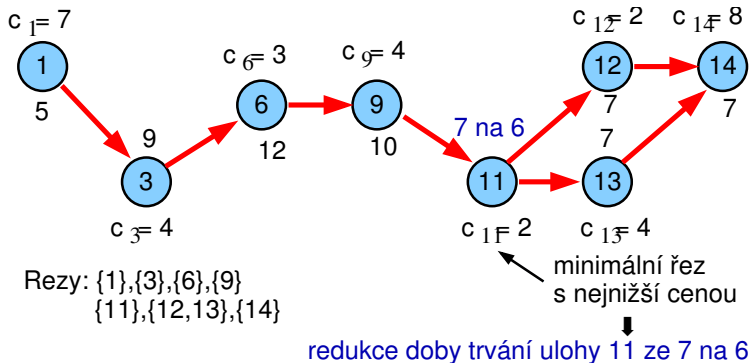
Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})

- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



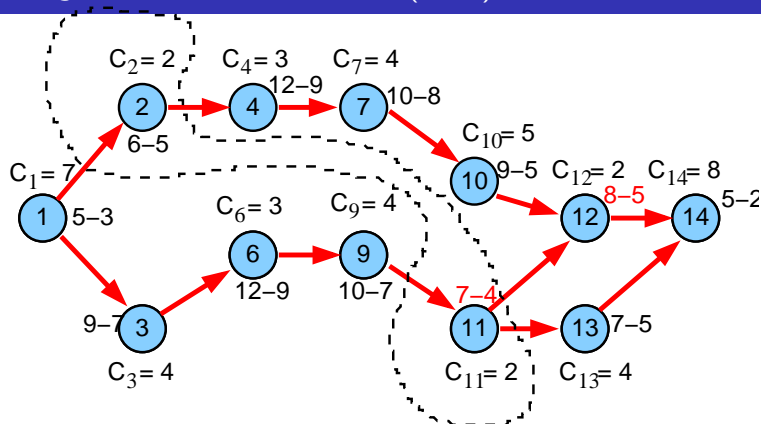
- Fixní režijní náklady se redukuje z 56×6 na $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{12} = 2$, tj. $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na $330 + 352 = 682$

Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})



- Fixní režijní náklady se redukuje z 55×6 na $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{11} = 2$, tj. $352 + 2 = 354$
- Celková cena klesla z 682 na $324 + 354 = 678$

Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})



další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukuje z 54×6 na $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_2 + c_{11} = 2 + 2$, tj. $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na $318 + 358 = 676$

Kompromisní heuristika: cvičení

- Jaká je cena za provádění projektu, pokud jsou doby trvání úloh maximální, tj. čemu se rovná $F(p_j^{max})$ za následujících předpokladů?
 - fixní režijní náklady na časovou jednotku jsou $c_0 = 4$
 - p_j^{max} maximální doba trvání úlohy j
 - p_j^{min} minimální doba trvání úlohy j
 - c_j marginální cena
 - c_j^b cena za provádění úlohy j při maximální době jejího trvání
 - $Prec_j$ předchůdci úlohy j

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_j^{max} | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 6 |
| p_j^{min} | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| c_j^b | 20 | 25 | 20 | 15 | 30 | 40 | 35 | 25 |
| c_j | 3 | 5 | 5 | 1 | 2 | 5 | 3 | 5 |

| <i>j</i> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------|---|---|-----|---|---|-----|---|---|
| <i>Prec_j</i> | - | 2 | 4,5 | 2 | 2 | 3,7 | 5 | 6 |

- Jak lze cenu za projekt zlepšit, pokud provedeme dva kroky kompromisní heuristiky? Kterým úlohám upravíte dobu trvání v jednotlivých krocích?

1 Plánování projektu

- Neomezené zdroje
- Variabilní doba trvání

2 Barvení grafu

- Popis problému a jednoduché řešení
- Přiřazení místností
- Rezervační problém
- Rozvrhování operátorů

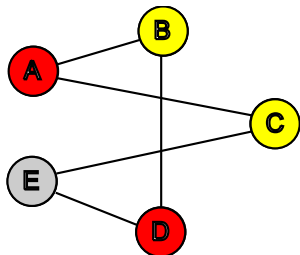
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přiřazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- **Intuice**
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
 - 1 uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
 - 2 použij barvu 1 pro první uzel
 - 3 vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
v případě volby z nich vyber uzel
s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
 - 4 obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
 - 5 jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
jinak běž na krok 3

- **Problém přřazení místností**

- úloha = předmět s několika schůzkami týdně
- zdroj = místnost
- dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
- všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

rozvrh: přřazení místnosti každému předmětu

možné řešení:

- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností

- **Přřazení místností jako barvení grafu**

- vrchol: předmět
- hrana: mezi předměty, které vyžadují stejný čas výuky
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti (zdroji)
 - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

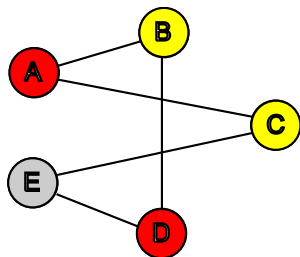
Přiřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

| | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| předmět | A | B | C | D | E |
| časy | (1,4) | (1,3) | (2,4) | (3,5) | (2,5) |
| stupeň | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

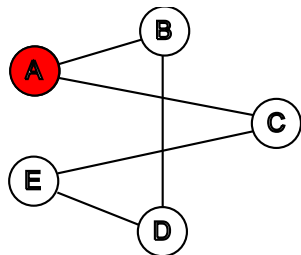
Řešení:

místnost červená žlutá žlutá červená šedá



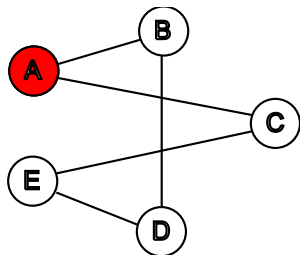
| čas/předmět | A | B | C | D | E |
|-------------|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | - | - | - |
| 2 | - | - | + | - | + |
| 3 | - | + | - | + | - |
| 4 | + | - | + | - | - |
| 5 | - | - | - | + | + |

Přiřazení místností: příklad (pokračování)

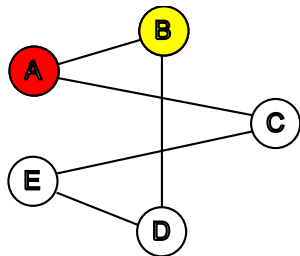


| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturace | - | 1 | 1 | 0 | 0 |
| stupeň neob. | - | 1 | 1 | 2 | 2 |

Přřazení místností: příklad (pokračování)

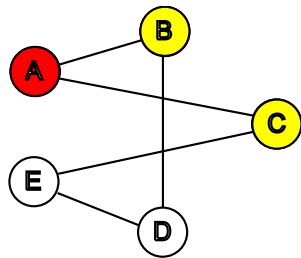


| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturace | - | 1 | 1 | 0 | 0 |
| stupeň neob. | - | 1 | 1 | 2 | 2 |



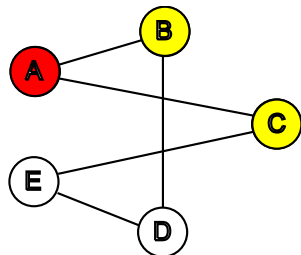
| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturace | - | - | 1 | 1 | 0 |
| stupeň neob. | - | - | 1 | 1 | 2 |

Přiřazení místností: příklad (dokončení)

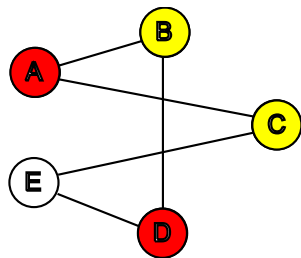


| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturovací | - | - | - | 1 | 1 |
| stupeň neob. | - | - | - | 1 | 1 |

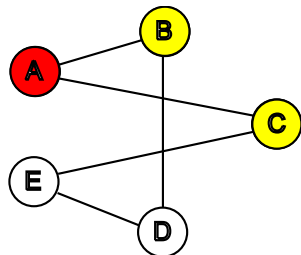
Přiřazení místností: příklad (dokončení)



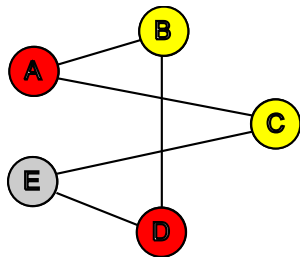
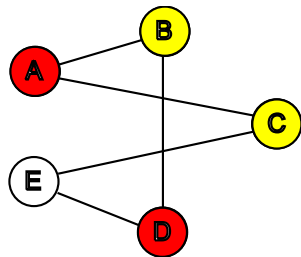
| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturace | - | - | - | 1 | 1 |
| stupeň neob. | - | - | - | 1 | 1 |



Přřazení místností: příklad (dokončení)



| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| předmět | A | B | C | D | E |
| saturace | - | - | - | 1 | 1 |
| stupeň neob. | - | - | - | 1 | 1 |



- Příklady
 - rezervace aut
 - rezervace pokojů v hotelu
 - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
 - $p_j = d_j - r_j$
 - p_j doba trvání úlohy
 - r_j termín dostupnosti
 - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů?
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací?

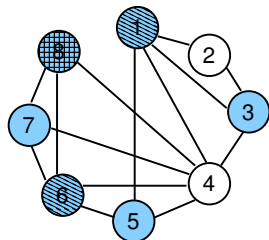
Rezervační problém jako barvení grafu

- Vrchol: rezervace
- Hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji
 - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací = chromatické číslo
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů = existuje barvení s daným počtem barev

• Příklad:

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r_j | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| d_j | 5 | 3 | 4 | 7 | 6 | 7 | 9 | 8 |

Odpovídající problém barvení grafu:



- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
 - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- Rozvrhování operátorů jako barvení grafu
 - vrchol: úloha
 - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
 - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
 - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu = existuje barvení s daným počtem barev
 - makespan = chromatické číslo grafu

Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

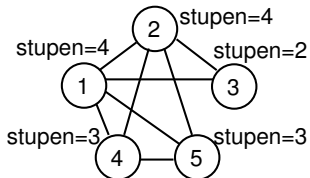
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| Joe | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Lisa | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jane | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Larry | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| Joe | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Lisa | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jane | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Larry | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

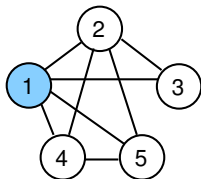
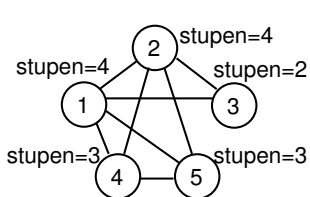


Příklad: plánování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

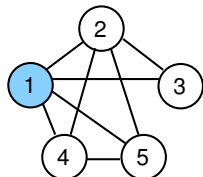
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| Joe | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Lisa | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Jane | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Larry | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |



Můžeme vybrat buď úlohu 1 nebo úlohu 2

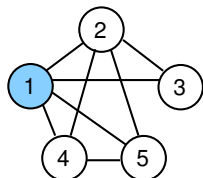
Např. vybereme 1 a obarvíme barvou 1

Příklad: plánování schůzek (dokončení)

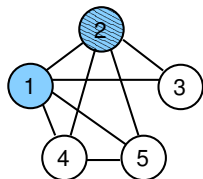


Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

Příklad: plánování schůzek (dokončení)

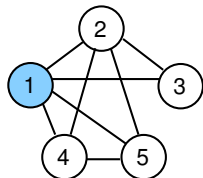


Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

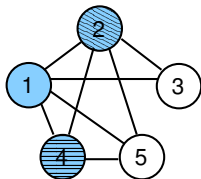


Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni

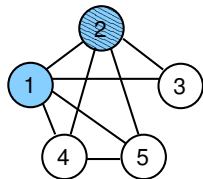
Příklad: plánování schůzek (dokončení)



Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni

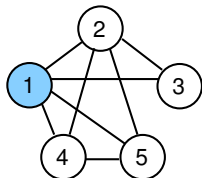


Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení

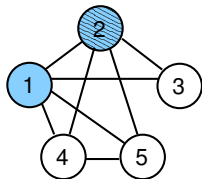


Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni

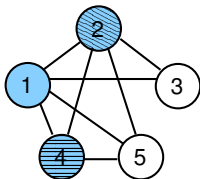
Příklad: plánování schůzek (dokončení)



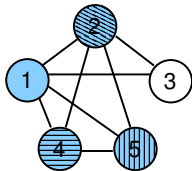
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



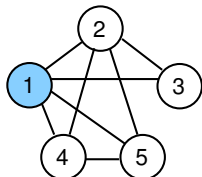
Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



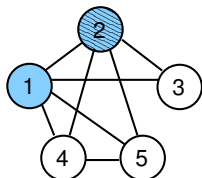
Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



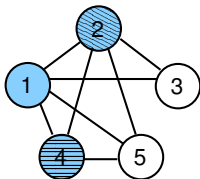
Příklad: plánování schůzek (dokončení)



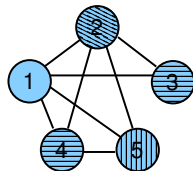
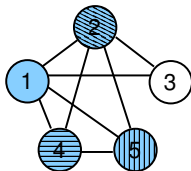
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Přirazení místnosti

- vrchol: předmět úloha
- hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas průnik časových bodů
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti zdroj
 - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

Rezervační problém

- vrchol: rezervace úloha
- hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase průnik intervalů
- barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji zdroj
 - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase

Rozvrhování operátorů

- vrchol: úloha úloha
- hrana: mezi úlohami vyžadujícími stejného operátora průnik zdrojů
- barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy časový bod
 - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

- 1 Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

| | | | | | |
|---------|---------|-------|-------|-------|-------|
| předmět | A | B | C | D | E |
| časy | (1,3,5) | (2,4) | (1,2) | (3,4) | (1,5) |

Nápověda: problém přiřazení místností

- 2 Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

| | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| operace | A | B | C | D | E | F |
| interval | 1-3 | 2-4 | 1-4 | 4-5 | 5-8 | 5-6 |

Nápověda: rezervační problém

- 3 Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

| | | | | | | | |
|---------|-----|-----|-------|-----|-----|-----|---|
| operace | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| stroje | A,B | C,D | A,C,E | E,F | E,G | D,G | G |

Nápověda: rozvrhování operátorů