Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$, kde

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\}\\
\delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\}\\
\delta(q_0, a, B) &= \{(q_0, AB)\}\\
\delta(q_0, b, Z) &= \{(q_0, BZ)\}\\
\delta(q_0, b, A) &= \{(q_0, BA)\}\\
\delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, BB)\}\\
\delta(q_0, \varepsilon, Z) &= \{(p, Z)\}\\
\delta(q_0, \varepsilon, A) &= \{(p, A)\}\\
\delta(q_0, \varepsilon, B) &= \{(p, B)\}\\
\delta(p, a, A) &= \{(p, \varepsilon)\}\\
\delta(p, b, B) &= \{(p, \varepsilon)\}\\
\delta(p, \varepsilon, Z) &= \{(f, Z)\}
\end{aligned}
$$

Příklad

$\mathcal{M} = (\{q_0\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$, kde

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, A)\}$$
$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$$
$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

Ekvivalence dvou způsobů akceptování

Věta 3.39. Pro každý jazyk L platí:
$L = L(\mathcal{N})$ pro nějaký PDA $\mathcal{N} \iff L = L_e(\mathcal{M})$ pro nějaký PDA $\mathcal{M}$.

Důkaz. koncový stav $\Longrightarrow$ prázdný zásobník

Intuice:

K danému $\mathcal{N}$ zkonstruujeme $\mathcal{M}$ simulující jeho činnost.
Vejde-li $\mathcal{N}$ do koncového stavu, $\mathcal{M}$ se nedeterministicky rozhodne

- pokračovat v simulaci automatu $\mathcal{N}$ **nebo**
- přejít do nově přidaného stavu q_ε, v němž vyprázdní zásobník.

Komplikace:

Řešení: před zahájením simulace bude u $\mathcal{M}$ na dně zásobníku nový symbol, který nedovolíme odstranit jinde, než ve stavu q_ε.

Konstrukce: Nechť $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$.

Klademe $\mathcal{M} = (Q \cup \{q_0', q_\varepsilon\}\ ,\ \Sigma\ ,\ \Gamma \cup \{Z'\}\ ,\ \delta'\ ,\ q_0'\ ,\ Z'\ ,\ \emptyset)$,
kde $Z' \notin \Gamma$, $q_0', q_\varepsilon \notin Q$ a δ' je definována takto:

- $\delta'(q_0', \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0Z')\}$
- jestliže $\delta(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ), pak $\delta'(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ)
- $\delta'(q, \varepsilon, Z)$ obsahuje (q_ε, Z)
  pro všechny $q \in F$ a $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$
- $\delta'(q_\varepsilon, \varepsilon, Z) = \{(q_\varepsilon, \varepsilon)\}$
  pro všechny $Z \in \Gamma \cup \{Z'\}$

Korektnost:

prázdný zásobník $\Longrightarrow$ koncový stav

Intuice:

K danému $\mathcal{M}$ zkonstruujeme $\mathcal{N}$ simulující jeho činnost.

- $\mathcal{N}$ si před simulací přidá na dno zásobníku nový symbol.
- Je-li $\mathcal{N}$ schopen číst tento symbol (tj. zásobník automatu $\mathcal{M}$ je prázdný) tak $\mathcal{N}$ přejde do nově přidaného stavu q_f, který je koncovým stavem.

Konstrukce: Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$.

Klademe $\mathcal{N} = (Q \cup \{q_0', q_f\}\,,\,\Sigma\,,\,\Gamma \cup \{Z'\}\,,\,\delta'\,,\,q_0'\,,\,Z'\,,\,\{q_f\})$,
kde $Z' \notin \Gamma$, $q_0', q_f \notin Q$ a δ' je definována takto:

- $\delta'(q_0', \varepsilon, Z') = \{(q_0, Z_0 Z')\}$
- jestliže $\delta(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ), pak $\delta'(q, a, Z)$ obsahuje (r, γ)
- $\delta'(q, \varepsilon, Z') = \{(q_f, \varepsilon)\}$
  pro všechny $q \in Q$ $\square$

Grafická reprezentace konfigurací

Rozšířený zásobníkový automat

Definice 3.44. **Rozšířený zásobníkový automat** je sedmice $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- všechny symboly až na δ mají tentýž význam jako v definici PDA,
- δ je zobrazením
  z konečné podmnožiny množiny $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*$
  do konečných podmnožin množiny $Q \times \Gamma^*$.

Pojmy konfigurace a akceptovaný jazyk (koncovým stavem, prázdným zásobníkem) zůstávají beze změny. **Krok výpočtu** $\underset{\mathcal{R}}{\vdash}$ definujeme takto:

$(p, aw, \gamma_1\alpha) \underset{\mathcal{R}}{\vdash} (q, w, \gamma_2\alpha) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists (q, \gamma_2) \in \delta(p, a, \gamma_1)$ pro $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Příklad

$\mathcal{R} = (\{q_0, p, f\}, \{a, b, c, d\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_0, Z, \{f\})$, kde

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= \{(q_0, A)\} \\
\delta(q_0, b, \varepsilon) &= \{(q_0, B)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, a, A) &= \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, b, B) &= \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, c, AA) &= \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, c, BBB) &= \{(p, \varepsilon)\} \\
\delta(p, d, Z) &= \{(f, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Ekvivalence rozšířených PDA a PDA

Lemma 3.45. Ke každému rozšířenému PDA existuje ekvivalentní (*obyčejný*) PDA.

Intuice:

Důkaz. Nechť $\mathcal{R} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je rozšířený PDA a $m = \max\{|\alpha| \mid \delta(q, a, \alpha)$ je definováno pro nějaké $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$.

Definujeme $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, Z_1, F_1)$, kde

- $Q_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in Q,\ \alpha \in \Gamma_1^*,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$,
- $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{Z_1\}$, kde Z_1 je nový symbol,
- $q_1 = [q_0, Z_0 Z_1^{m-1}]$,
- $F_1 = \{[q, \alpha] \mid q \in F, \alpha \in \Gamma_1^*,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.

- δ_1 je definována takto:
  - jestliže $\delta(q, a, X_1 \dots X_k)$ obsahuje $(r, Y_1 \dots Y_l)$, pak

    $l \geq k$

    $\delta_1([q, X_1 \dots X_k\alpha], a, Z)$ obsahuje $([r, \beta], \gamma Z)$,
    kde $\beta\gamma = Y_1 \dots Y_l\alpha$ a $|\beta| = m$,
    pro všechny $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| = m - k$

    $l < k$

    $\delta_1([q, X_1 \dots X_k\alpha], a, Z)$ obsahuje $([r, Y_1 \dots Y_l\alpha Z], \varepsilon)$
    pro všechny $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| = m - k$
  - $\delta_1([q, \alpha], \varepsilon, Z) = \{([q, \alpha Z], \varepsilon)\}$
    pro všechny $q \in Q$, $Z \in \Gamma_1$ a $\alpha \in \Gamma_1^*$ takové, že $|\alpha| < m$

Korektnost: Ověříme, že platí

$$(q, aw, X_1 \ldots X_k X_{k+1} \ldots X_n) \vdash_{\mathcal{R}} (r, w, Y_1 \ldots Y_l X_{k+1} \ldots X_n)$$
$$\iff ([q, \alpha], aw, \beta) \vdash_{\mathcal{P}}^{+} ([r, \alpha'], w, \beta'),$$

kde:

1. $\alpha\beta = X_1 \ldots X_n Z_1^m$,
2. $\alpha'\beta' = Y_1 \ldots Y_l X_{k+1} \ldots X_n Z_1^m$,
3. $|\alpha| = |\alpha'| = m$ a
4. mezi dvěma výše uvedenými konfiguracemi PDA $\mathcal{P}$ neexistuje taková konfigurace, kde druhá komponenta stavu (tj. buffer) by měla délku m.

$\square$