Konečné automaty

Definice 1. **Konečný automat** (Finite Automaton, FA) $\mathcal{M}$ je pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je neprázdná konečná množina **stavů**.
- Σ je konečná **vstupní abeceda**.
- $\delta : \ Q \times \Sigma \to Q$ je parciální **přechodová funkce.**
- $q_0 \in Q$ je **počáteční (iniciální) stav.**
- $F \subseteq Q$ je množina **koncových (akceptujících) stavů.**

Příklad a zápis tabulkou

Zápis grafem

Výpočet konečného automatu

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta}$: $Q \times \Sigma^* \to Q$ je parciální funkce definovaná induktivně vzhledem k délce slova ze Σ^*:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ pro každý stav $q \in Q$.
- $\hat{\delta}(q, wa) = \begin{cases} \delta(\hat{\delta}(q,w),a) & \text{je-li } \hat{\delta}(q,w) \text{ i } \delta(\hat{\delta}(q,w),a) \text{ definováno,} \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$

Slovo w je **akceptováno** automatem $\mathcal{M}$ právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.

Slovo w je **zamítáno** automatem $\mathcal{M}$ právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \notin F$.

Jazyk **přijímaný** (**akceptovaný**, **rozpoznávaný**) automatem $\mathcal{M}$ je

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Jazyk, který je rozpoznatelný (nějakým) konečným automatem, nazveme **regulární**.

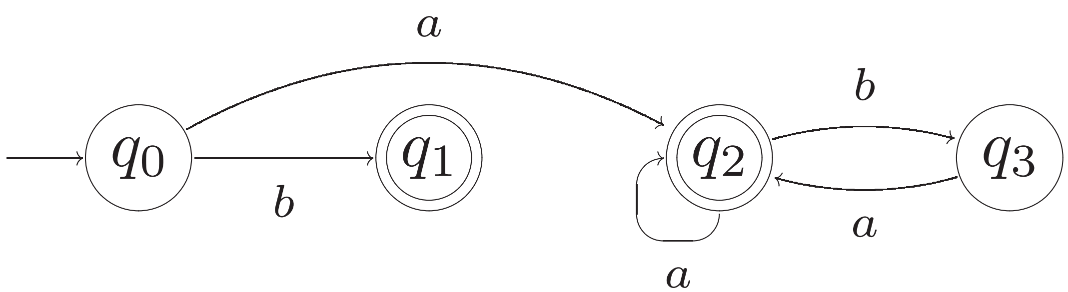
Ekvivalenci konečných automatů definujeme podobně jako v případě gramatik: konečné automaty $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ jsou ekvivalentní, pokud $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

Parcialita přechodové funkce

Přechodová funkce δ zavedena jako parciální.
Parcialita přechodové funkce nemá podstatný vliv na výpočetní sílu konečných automatů.

Lemma 1. Ke každému FA $\mathcal{M}$ existuje ekvivalentní FA $\mathcal{M}'$ s totální přechodovou funkcí.

Idea důkazu



Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Nechť automat $\mathcal{M}'$ je definován předpisem
$\mathcal{M}' = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$, kde $p \notin Q$ a

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{je-li } \delta(q,a) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zejména $\delta'(p,a) = p$ pro každé $a \in \Sigma$.

Důkaz korektnosti:

- $\mathcal{M}$' má totální přechodovou funkci – zřejmé z definice $\mathcal{M}'$.
- $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$' jsou ekvivalentní – dokážeme.

Indukcí k délce slova ověříme, že pro každé $q \in Q$ a $w \in \Sigma^*$ platí

$$\widehat{\delta'}(q, w) = \begin{cases} \hat{\delta}(q, w) & \text{je-li } \hat{\delta}(q, w) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož $p \notin F$, platí $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$. $\square$

Konstrukce konečných automatů

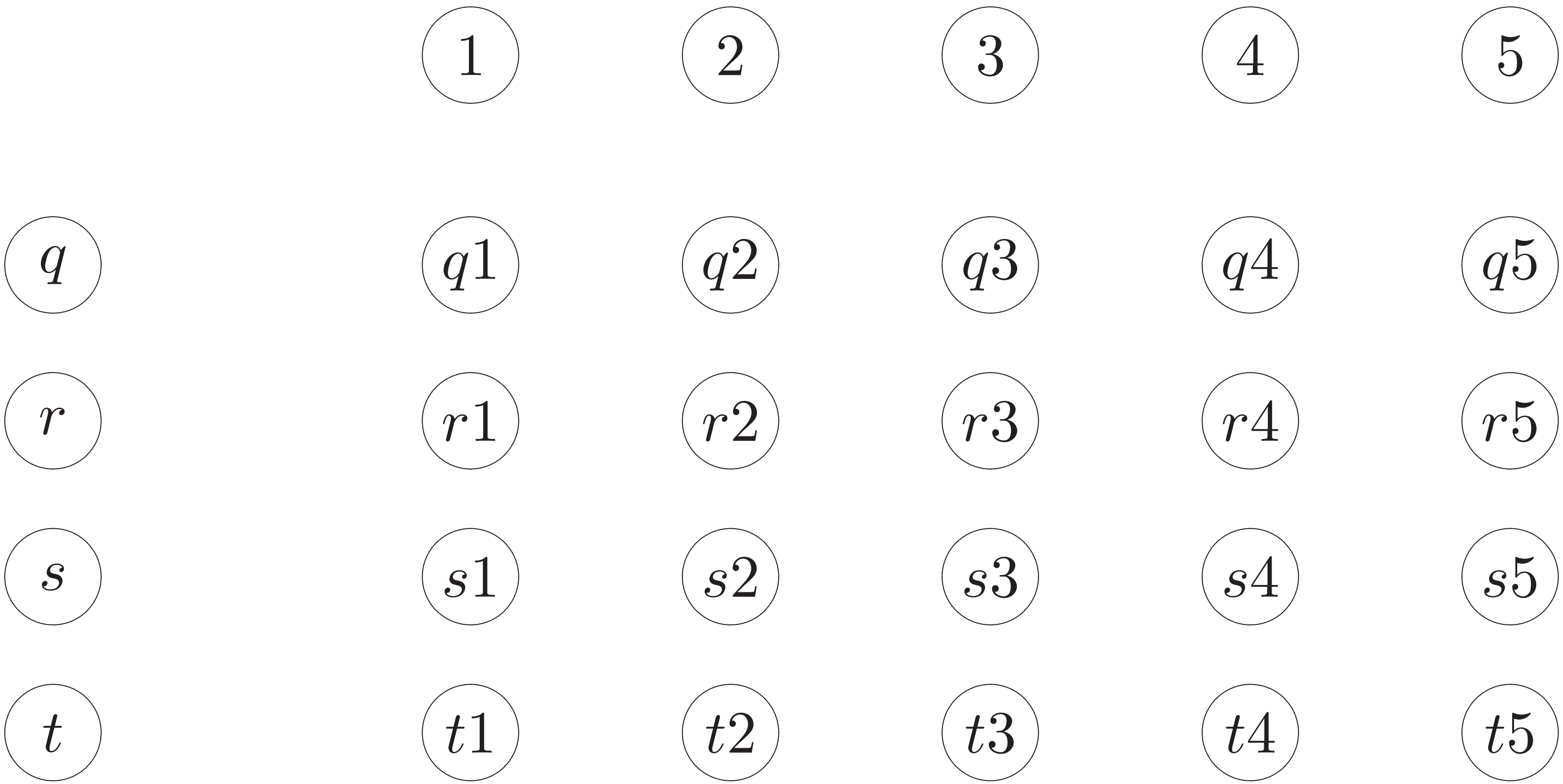
Máme za úkol sestrojit automat rozpoznávající jazyk

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abaa\}$$

Označení stavů automatu zvolíme tak, aby bylo patrné, jaká část požadovaného podslova $abaa$ již byla automatem přečtena:

Příklad

$\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abaa \ \wedge \ (w = b \vee w$ začíná i končí na a a mezi dvěma výskyty b je alespoň jedno $a)\}$



Synchronní paralelní kompozice automatů

Pro dané automaty $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ umožňuje sestrojit automat rozpoznávající **průnik** (**sjednocení**, **rozdíl**) jazyků $L(\mathcal{M}_1)$ a $L(\mathcal{M}_2)$.

Nechť $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$
a **přechodové funkce** δ_1, δ_2 **jsou totální**.

Definujeme FA $\mathcal{M}_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$, kde

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2 = \{(p, q) \mid p \in Q_1, q \in Q_2\}$
- $F_3 = F_1 \times F_2 = \{(p, q) \mid p \in F_1, q \in F_2\}$
- $q_3 = (q_1, q_2)$
- $\delta_3((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Tvrzení: $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$

Důkaz. Nejprve dokážeme toto tvrzení:

$$\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), w) = (p, q) \iff \widehat{\delta_1}(q_1, w) = p \land \widehat{\delta_2}(q_2, w) = q$$

Důkaz se provede indukcí vzhledem k $|w|$.

- **Základní krok $|w| = 0$:**
  Z definice $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$, $\widehat{\delta_1}(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\widehat{\delta_2}(q_2, \varepsilon) = q_2$.
  Pro $w = \varepsilon$ je tedy ekvivalence platná.

- **Indukční krok:** Nechť $w = va$, kde $v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$. Platí:
  $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), va) = (p, q) \iff$
  $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), v) = (r, s) \ \land \ \delta_3((r, s), a) = (p, q) \iff$
  $\widehat{\delta_1}(q_1, v) = r \ \land \ \widehat{\delta_2}(q_2, v) = s \land \delta_1(r, a) = p \ \land \ \delta_2(s, a) = q \iff$
  $\widehat{\delta_1}(q_1, va) = p \ \land \ \widehat{\delta_2}(q_2, va) = q$

Nyní již lze snadno dokázat vlastní tvrzení věty:

$w \in L(\mathcal{M}_3) \iff$

$\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), w) = (p, q)$ kde $p \in F_1$ a $q \in F_2 \iff$

$\widehat{\delta_1}(q_1, w) = p \wedge \widehat{\delta_2}(q_2, w) = q \iff$

$w \in L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$. $\square$

Modifikace pro **sjednocení**, tj. $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cup L(\mathcal{M}_2)$:

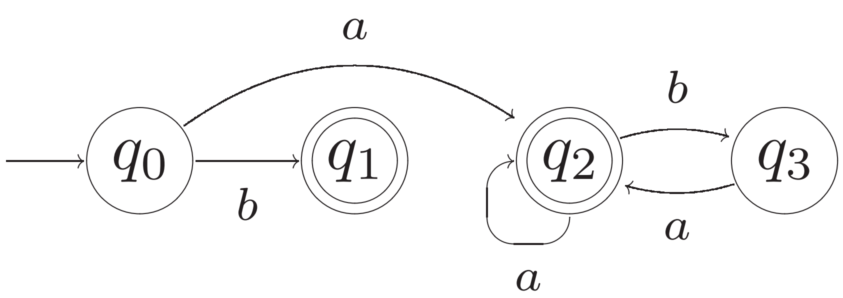
DÚ: Modifikujte konstrukci tak, aby platilo $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \smallsetminus L(\mathcal{M}_2)$.

Automat pro komplement

K automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s **totální přechodovou funkcí** sestrojíme automat $\overline{\mathcal{M}}$ rozpoznávající jazyk co–$L(\mathcal{M})$ jako

$$\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F).$$

$\mathcal{M}$:



$\overline{\mathcal{M}}$: