2 Druhé cvičení

2.1 Syntax

Definice 2.1 *Abecedu výrokové logiky* tvoří následující symboly:

- znaky pro *výrokové proměnné* $A, B, C, \ldots$, kterých je spočetně mnoho;
- *logické spojky* $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ a
- *závorky* (a).

Formule výrokové logiky je slovo φ nad abecedou výrokové logiky, pro které existuje *vytvořující posloupnost*, tj. konečná posloupnost slov $\psi_1, \ldots, \psi_k$, kde $k \geq 1$, $\psi_k = \varphi$ a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo ψ_i jeden z následujících tvarů:

- výroková proměnná
- $\neg\psi_j$ pro nějaké $1 \leq j < i$,
- $(\psi_j \circ \psi_{j'})$ pro nějaká $1 \leq j, j' < i$, kde $\circ$ je jeden ze symbolů $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

Příklad 2.2 Jsou následující slova formulemi výrokové logiky? Rozhodněte a dokažte.

a) $((A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_3 \vee \neg A_4))$
b) $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (A_4 \rightarrow \cdots$
   (tento zápis značí nekonečné slovo)
c) $(A_1 \wedge (A_2 \wedge (\cdots \wedge (A_{k-1} \wedge A_k) \cdots)))$, kde $k \in \mathbb{N}$
   (tento zápis je pouze zkratka pro slovo o $4k - 3$ znacích)
d) $(A_1 \wedge \vee A_2)$

2.2 Sémantika

Definice 2.3 *Pravdivostní ohodnocení (valuace)* je zobrazení v, které každé výrokové proměnné přiřadí hodnotu 0 nebo 1. Metamatematickou indukcí k délce vytvořující posloupnosti jednoznačně rozšíříme v na všechny výrokové formule:

- $v(A)$ již definováno;
- $v(\neg\psi)$ definujeme jako 0, pokud $v(\psi) = 1$, jako 1 jinak;
- $v(\psi_1 \wedge \psi_2)$ definujeme jako 1, pokud $v(\psi_1) = 1$ a $v(\psi_2) = 1$, jako 0 jinak;
- $v(\psi_1 \vee \psi_2)$ definujeme jako 1, pokud $v(\psi_1) = 1$ nebo $v(\psi_2) = 1$, jako 0 jinak;
- $v(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ definujeme jako 1, pokud $v(\psi_1) = 0$ nebo $v(\psi_2) = 1$, jako 0 jinak.

Dále řekneme, že výroková formule φ je

- *pravdivá (resp. nepravdivá) při valuaci* v, pokud $v(\varphi) = 1$ (resp. 0);
- je *splnitelná*, pokud existuje valuace v taková, že $v(\varphi) = 1$;
- *tautologie*, jestliže $v(\varphi) = 1$ pro každou valuaci v.

Soubor T výrokových formulí je *splnitelný*, jestliže ex. v taková, že $v(\varphi) = 1$ pro každé φ z T. Formule φ a ψ jsou *ekvivalentní* ($\varphi \approx \psi$), právě když pro každou valuaci v platí, že $v(\varphi) = v(\psi)$.

Příklad 2.4 Je následující formule s výrokovými proměnnými A, B, C splnitelná? Rozhodněte a dokažte.

$$(A \rightarrow \neg A) \wedge ((B \leftrightarrow C) \wedge (\neg A \rightarrow C))$$

Příklad 2.5 Dejte příklad formulí φ a ψ takových, že

- $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie a zároveň
- $\psi \rightarrow \varphi$ je kontradikce.

Příklad 2.6 Nechť A je výroková proměnná. Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule φ taková, že

a) $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow A) \approx A$
b) $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow A) \approx \neg A$

c) $\varphi \to (A \to \varphi) \approx A$
d) $(\varphi \to A) \to \varphi \approx \neg A$

Příklad 2.7 (SAT solver) Najděte co nejrychleji splňující valuaci.

$$(A \vee B \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge$$
$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D) \wedge (B \vee A \vee C) \wedge (\neg D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge$$
$$(B \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee A) \wedge (C \vee \neg B \vee D) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$$

Příklad 2.8 Mějme tři domorodce, Argh, Bhee a Cshou, z Ostrova poctivců a padouchů.[1] Každý obyvatel tohoto ostrova je buď poctivec nebo padouch, poctivci mluví vždy pravdu, padouši vždy lžou. Domorodci Argh a Bhee pronesou následující tvrzení:

a) Argh: "Bhee a Cshou jsou oba poctivci"
   Bhee: "Argh je padouch a Cshou je poctivec"
b) Argh: "Bhee je padouch"
   Bhee: "Argh a Cshou mají různou povahu"

Kteří domorodci jsou poctivci a kteří padouši?

2.3 Aplikace

Definice 2.9 *Orientovaný graf* je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subseteq V^2$ je množina orientovaných hran mezi vrcholy.

Neorientovaný graf je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ je množina hran mezi vrcholy (tedy množina neuspořádaných dvojic).

Graf je souvislý, pokud pro každé dva vrcholy u, v existuje alespoň jedna cesta z u do v. Neorientovaný graf je *strom*, pokud je souvislý a po odebrání libovolné hrany se stane nesouvislým.

Příklad 2.10 Nechť G je neorientovaný souvislý graf. Nalezněte systém formulí $\mathcal{T}$ takový, že

$$\mathcal{T} \text{ je splnitelný} \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ je souvislý, ale není strom}$$

Příklad 2.11 Nechť A, B jsou spočetné množiny a $R \subseteq A \times B$ je relace taková, že pro každé $a \in A$ je $B_a = \{b \mid (a, b) \in R\}$ konečný neprázdný soubor. Nalezněte systém formulí $\mathcal{T}$ takový, že

$$\mathcal{T} \text{ je splnitelný} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existuje injektivní funkce } f : A \to B \text{ taková, že } f \subseteq R$$

(Také zadání můžete chápat jako bipartitní graf zadaný pomocí (A, B, R) s párováním f.)

Definice 2.12 Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf a $|V| = n$. *Hamiltonovská kružnice* (HK) v orientovaném grafu G je posloupnost vrcholů $v_0, v_1, \ldots, v_n$, tak že $v_0 = v_n$, pro všechna $0 \leq i < n$ platí $(v_i, v_{i+1}) \in E$ a pro všechna $0 \leq i < j < n$ platí $v_i \neq v_j$.

Příklad 2.13 Nechť G je orientovaný graf. Zadejte formuli φ takovou, že platí

$$\varphi \text{ je splnitelná} \Longleftrightarrow G \text{ obsahuje Hamiltonovskou kružnici} \tag{1}$$

a φ lze sestrojit v polynomiálním čase.
(Úkolem je tedy v polynomiálním čase redukovat problém Hamiltonovské kružnice na NP-úplný problém splnitelnosti výrokových formulí (SAT).)

[1] Tento příklad pochází z knihy Navěky nerozhodnuto od Raymonda Smullyana