

7 Barevnost a další těžké problémy

Pro motivaci této lekce se podíváme hlouběji do historie počátků grafů v matematice. Kromě slavného problému *sedmi mostů v Královci* (dnešním Kaliningradě) je za další historický milník vývoje teorie grafů považován *problém čtyř barev* pocházející z poloviny 19. století: Kolik nejméně barev je třeba použít na obarvení politické mapy pro rozlišení sousedních států?

Na rozdíl od sedmi mostů, problém čtyř barev zůstal nevyřešený po více než 100 let a stimuloval rozvoj skoro všech moderních oblastí teorie grafů.

Někteří však kladou prapočátky grafů v matematice daleko před Eulerovými sedmi mosty či problémem čtyř barev, až ke středověké otázce, zda lze šachovým *koněm obejít celou šachovnici* bez opakování. Tato otázka vede v moderním pojetí k dalšímu zajímavému a obtížnému problému tzv. *Hamiltonovské kružnice* v grafu... □

Stručný přehled lekce

- Definice barevnosti grafu, základní vlastnosti.
- Varinaty problému barvení.
- Další „obtížné“ problémy jako Hamiltonovská kružnice.
- Algoritmická složitost (NP-úplnost) základních grafových problémů.

7.1 Barevnost grafu

Nejprve si uveďme pojem barevnosti – představme si, že hrany grafu nám říkají, že jejich koncové vrcholy musí být barevně odlišené (třeba proto, že reprezentují sousední státy, nebo proto, že jinak jsou si příliš podobné a je třeba je jinak rozlíšit, atd). □ Samozřejmě bychom mohli každému vrcholu grafu dát jinou barvu, ale k čemu by pak takový problém byl? My bychom chtěli použít barev celkem co nejméně. □

Definice: *Obarvením grafu* G pomocí k barev myslíme libovolné zobrazení

$$c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

takové, že každé dva vrcholy spojené hranou dostanou různé barvy, tj. $c(u) \neq c(v)$ pro všechny $\{u, v\} \in E(G)$.

Definice 7.1. Barevnost grafu G

je nejmenší číslo $\chi(G)$ pro které existuje obarvení grafu G pomocí $\chi(G)$ barev. □

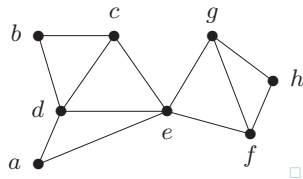
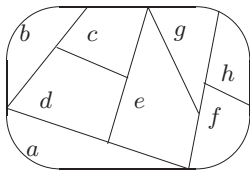
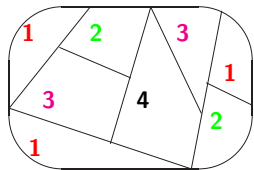
Čísla $1, 2, \dots, k$ z předchozí definice tak nazýváme barvami vrcholů (je to pohodlnější, než popisovat barvy běžnými jmény jako bílá, červená, atd).

Poznámka: Uvědomme si, že barevnost lze definovat pouze pro graf bez smyček, protože oba konce smyčky mají vždy stejnou barvu a nic s tím nenaděláme.

Lema 7.3. *Nechť G je jednoduchý graf (bez smyček) na n vrcholech. Pak $\chi(G) \leq n$ a rovnost nastává právě když $G \simeq K_n$ je úplný graf. \square*

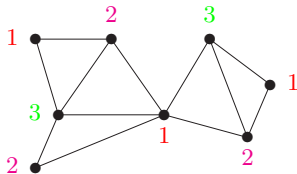
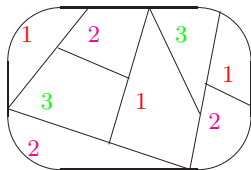
Důkaz: Stačí každý vrchol obarvit jinou barvou a máme skutečné obarvení n barvami dle definice. Navíc pokud některá dvojice u, v vrcholů není spojená hranou, můžeme volit lepší obarvení $c(u) = c(v) = 1$ a zbylé vrcholy různými barvami $2, 3, \dots, n - 1$, tj. pak $\chi(G) < n$. \square

Příklad 7.4. Vraťme se k příkladu „barvení“ mapy z úvodu lekce a ukažme si, jak mapy souvisejí s grafy a jejich barevností.



Jednotlivé oblasti na mapě (předpokládáme, že každý stát má souvislé území, tj. státy = oblasti) prohlásíme za vrcholy našeho grafu a sousední dvojice států spojíme hranami. Nezapomeňme, že „sousední“ znamená sdílení celého úseku hranice, ne jen jednoho rohu. □

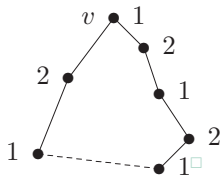
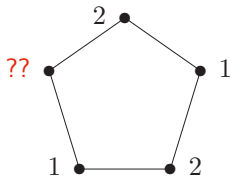
Při troše snahy také najdeme lepší obarvení uvedené mapy využívající pouhých tří barev:



Věta 7.5. *Neprázdný graf G má barevnost 1 právě když nemá žádné hrany. G má barevnost ≤ 2 právě když nemá žádnou kružnici liché délky jako podgraf. \square*

Důkaz: Pokud graf nemá hrany, můžeme všechny vrcholy obarvit stejnou barvou 1. Naopak pokud mají všechny vrcholy stejnou barvu, nemůže graf mít žádnou hranu. \square

Druhá část: Na jednu stranu, lichou kružnici nelze obarvit dvěma barvami, viz obrázek. Na druhou stranu si představme, že zvolíme libovolný vrchol v grafu G s barvou 1 a ostatní vrcholy obarvíme takto: Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je lichá, obarvíme 2. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je sudá, obarvíme 1.



Pokud bychom tak získali třeba dva vrcholy spojené hranou f v sudé vzdálenosti od v , získáme uzavřený sled S liché délky přes f a v . Stejně tak pro dva vrcholy v liché vzdálenosti. Ponecháme-li ze sledu S ty hrany, které se opakují lichý počet krát, dostaneme Eulerovský podgraf T lichého počtu hran. Jak již víme (Oddíl 4.1), T pak obsahuje kružnici a tudíž jej lze induktivně sestavit jako hranově-disjunktní sjednocení kružnic. Avšak sjednocení kružnic sudé délky nevytvoří T liché velikosti, spor. Proto naše obarvení za daných předpokladů nemůže dát stejnou barvu sousedním vrcholům, a tudíž dvě barvy stačí. \square

Hladové obarvení

Definice: Graf G je *k -degenerovaný*, pokud každý podgraf G obsahuje vrchol stupně nejvýše k .

Příkladem k -degenerovaného grafu je každý graf stupně nejvýše k , ale na druhou stranu k -degenerované grafy mohou mít vysoké stupně. (Nestačí však mít jen nízký nejmenší stupeň!)

□

Věta 7.6. Každý k -degenerovaný graf lze správně hladově obarvit $k + 1$ barvami. □

Důkaz: Jelikož graf G je k -degenerovaný, vybereme libovolný jeho vrchol v_1 stupně nejvýše k a rekurzivní aplikací tohoto postupu obarvíme podgraf $G - v_1$, který je podle definice také k -degenerovaný. Nakonec si všimneme, že $\leq k$ sousedé vrcholu v_1 dostanou nejvýše k různých barev, takže v_1 dobarvíme zbylou barvou. □

Důležité aplikace této věty uvidíme v příští lekci, avšak jedno zajímavé zesílení (*Brooksovu větu*) si uvedeme nyní:

Věta 7.7. *Nechť G je souvislý jednoduchý graf maximálního stupně $k \geq 2$. Pak $\chi(G) \leq k$ až na případy, kdy G je úplný graf nebo lichá kružnice.*

Důkaz (náznak): Pro $k = 2$ plyne tvrzení z Věty 7.5. Nechť tedy $k \geq 3$. V jednom směru je jasné, že $\chi(K_{k+1}) = k + 1$. Naopak tedy předpokládejme, že G není úplný. Zároveň se omezme jen na případ, že G má všechny stupně rovné k , neboť jinak lze aplikovat postup z Věty 7.6. \square

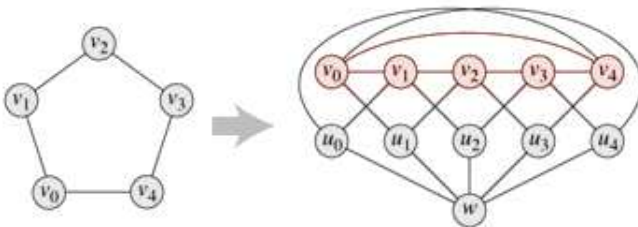
- Prvním krokem nahlédneme, že pak G obsahuje dva nespojené vrcholy u, v se společným sousedem w . Pokud ale je graf $G - \{u, v\}$ nesouvislý, pak graf příslušně rozdělíme a indukcí po částech obarvíme. \square
- Přidejme tedy předpoklad, že $G - \{u, v\}$ je souvislý. Druhým krokem nahlédneme, že graf H vzniklý z $G - w$ ztotožněním u s v do jednoho vrcholu je $(k - 1)$ -degenerovaný. \square
- Tudíž graf H hladově obarvíme k barvami podle Věty 7.6. Po opětovném „rozpojení“ vrcholů u, v získáme obarvení $G - w$ k barvami takové, že u, v mají stejnou barvu. Nyní w má v sousedství nejvýše $k - 1$ barev a G celý obarvíme. \square

Grafy vysoké barevnosti

Ke správnému pochopení barevnosti grafu je nezbytné se zamyslet, které grafy mají vysokou barevnost. Jedná se například o grafy obsahující velké kliky (úplné podgrafy). Je to však vše? □

Není! Lze nalézt grafy s libovolně vysokou barevností neobsahující ani trojúhelníky.

Tvrzení 7.8. (Mycielski) *Graf získaný z grafu G následující konstrukcí (viz obrázek) má barevnost $\chi(G) + 1$ a neobsahuje trojúhelníky, pokud je neobsahuje ani G .*



□

Nejobecněji lze říci následující překvapivé tvrzení:

Věta 7.9. (Erdős) *Pro každá $c, r > 0$ existuje graf s barevností alespoň c a neobsahující kružnice kratší než r .*

7.2 Variace na barevnost a jiné

Definice 7.10. Hranová barevnost grafu G .

Hledáme obarvení $c_e(E(G)) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že žádné dvě hrany se společným vrcholem nedostanou stejnou barvu.

Nejmenší možný počet barev k , pro které hranové obarvení existuje, se nazývá **hranová barevnost** $\chi_e(G)$ grafu. \square

Na rozdíl od běžné barevnosti umíme hranovou barevnost docela ostře aproximovat.

Věta 7.11. (Vizing) Pro každý jednoduchý graf platí $\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Platí, že většina grafů splňuje $\Delta(G) = \chi_e(G)$. Umíte jednoduše sestrojít (a dokázat) příklady pro druhý případ?

Problém přesného určení hranové barevnosti grafu však stále zůstává algoritmicky velmi obtížný a také úzce souvisí s problémem čtyř barev.

Definice 7.12. **Výběrová barevnost** grafu G .

Je dán graf G spolu s přiřazenými „seznamy barev“ $L : V(G) \rightarrow \binom{\mathbb{N}}{k}$ (k -prvkové podmnožiny). Nyní hledáme obarvení $c_{ch} : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že žádné dva sousední vrcholy nedostanou stejnou barvu a navíc $c_{ch}(v) \in L(v)$ pro každý vrchol v .

Nejmenší možná délka k seznamů barev, pro kterou výběrové obarvení vždy existuje (tj. pro každou možnou takovou volbu seznamů), se nazývá **výběrová barevnost** $ch(G)$ grafu. \square

Výběrová barevnost může (kupodivu!) být libovolně „vzdálena“ běžné barevnosti.

Tvrzení 7.13. *Pro každé k nalezneme bipartitní graf s výběrovou barevností větší než k .* \square

Fakt: Hranová výběrová barevnost úplných bipartitních grafů úzce souvisí se známým problémem *latinských obdélníků*.

Hamiltonovské grafy

Definice: Kružnice C obsažená v grafu G se nazývá *Hamiltonovská*, pokud C prochází všemi vrcholy G . Obdobně mluvíme o *Hamiltonovské cestě* P v G , pokud cesta $P \subset G$ prochází všemi vrcholy G .

Graf G je *Hamiltonovský*, pokud obsahuje Hamiltonovskou kružnici. \square

Možná to zní překvapivě, ale i problém Hamiltonovské kružnice úzce souvisel s řešením problému čtyř barev. To je však mimo rámec našeho textu.

Věta 7.14. (Dirac) Každý graf na $n \geq 3$ vrcholech s minimálním stupněm $\geq n/2$ je Hamiltonovský. \square

Důkaz (náznak): Nechť P je nejdelší cesta v grafu G s vrcholy po řadě u_0, u_1, \dots, u_k . Podle její maximality leží každý soused u_0 i u_k na P . Pak existuje $0 < i < k$ takové, že $u_0 u_{i+1} \in E(G)$ a zároveň $u_k u_i \in E(G)$. Pak $u_0 u_{i+1} P u_k u_i P$ tvoří kružnici v G a snadno plyne, že se jedná o Hamiltonovskou kružnici. \square

7.3 \mathcal{NP} -úplnost grafových problémů

Definice složitostní třídy \mathcal{NP} se týká výhradně **rozhodovacích problémů** (s „ANO/NE“ odpovědí). Dá se neformálně říci, že problém patří do třídy \mathcal{NP} , pokud jeho odpověď ANO lze prokázat (ve smyslu „uhodnout a ověřit“) výpočtem, který běží v polynomiálním čase.

\mathcal{NP} -úplné problémy jsou zhruba řečeno ty, které ve třídě \mathcal{NP} mají nejvyšší obtížnost řešení.

Od jednoho \mathcal{NP} -úplného problému A se dostaneme k jinému B tzv. **polynomiálním převodem**: Ukážeme, jak bychom ze známého postupu řešení B efektivně našli řešení (libovolné instance) A . \square

Nyní si ukážeme vhodnými převody, že oněch „nejobtížnějších“ (\mathcal{NP} -úplných) problémů je v teorii grafů mnoho, bohužel by se dalo říci většina. To ostatně ukazuje, proč jsme zatím v praxi tak **málo úspěšní při počítačovém řešení** mnohých praktických problémů – přesné a efektivní řešení \mathcal{NP} -úplných úloh se totiž všeobecně považuje za nemožné.

Problém 7.15. 3-SAT (splnitelnost logických formulí ve spec. verzi)

Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Logická formule Φ v konjunktivním normálním tvaru taková, že každá klauzule obsahuje nejvýše 3 literály.

Výstup: Existuje logické ohodnocení proměnných tak, aby výsledná hodnota Φ byla 1 (pravda)?

Problém 7.16. 3-COL (3-obarvení grafu)

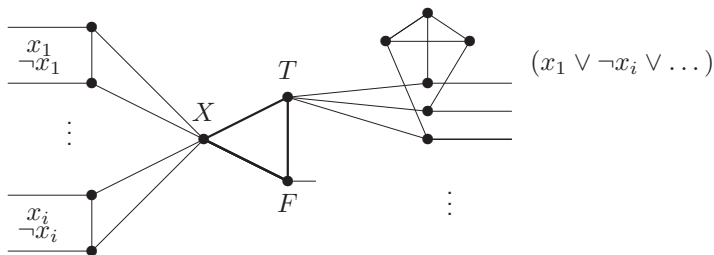
Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Graf G .

Výstup: Lze vrcholy G korektně obarvit 3 barvami?

Důkaz (náznak): Ukážeme si polynomiální převod z problému 3-SAT. \square

Sestrojíme graf G pro danou formuli Φ . Základem grafu je trojúhelník, jehož vrcholy označíme X, T, F . Každé proměnné x_i ve Φ přiřadíme dvojici vrcholů spojených s X . Každé klauzuli ve Φ přiřadíme podgraf na 6 vrcholech (z nichž tři jsou spojené s T), jako na obrázku. Nakonec volné „půlhrany“ z obrázku pospojujeme dle toho, jaké literály vystupují v klauzulích.



Pak G má 3-obarvení právě když je Φ splnitelná, jak si lze ověřit na obrázku. \square

Problém 7.17. IS (nezávislá množina)

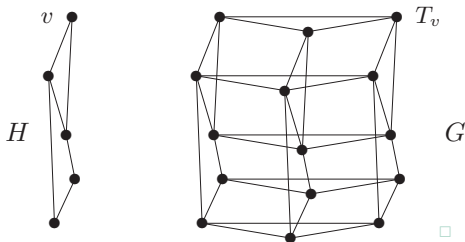
Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Graf G a přirozené číslo k .

Výstup: Lze v G najít nezávislou podmnožinu velikosti (aspoň) k ? \square

Důkaz: Ukážeme polynomiální převod z problému 3-COL.

Nechť H je graf na n vrcholech, který je za úkol obarvit třemi barvami. Položíme $k = n$ a graf G sestrojíme ze tří disjunktních kopií grafu H takto:



Pokud $c : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ je obarvení H třemi barvami, v grafu G lze vybrat $k = n$ nezávislých vrcholů tak, že pro každý $v \in V(H)$ vezmeme $c(v)$ -tou kopii vrcholu v v grafu G . Naopak pokud I je nezávislá množina v grafu G o velikosti $k = n$, pak z každého trojúhelníku T_v , $v \in V(H)$ náleží do I právě jeden vrchol. Podle toho již určíme jednu ze tří barev pro vrchol v v H . \square

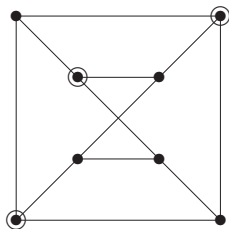
Problém 7.18. VC (vrcholové pokrytí)

Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

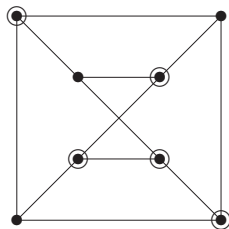
Vstup: Graf G a přirozené číslo k .

Výstup: Lze v G najít **vrcholové pokrytí**, tj. množinu $C \subseteq V(G)$ takovou, že každá hrana G má alespoň jeden konec v C , o velikosti nejvýše k ? \square

Důkaz: Ukážeme polynomiální převod z problému IS. Necht' G je graf na n vrcholech, v němž máme najít nezávislou množinu I velikosti ℓ . Všimněme si, že doplněk $C = V(G) \setminus I$ nezávislé množiny I je vlastně vrcholovým pokrytím. Takže v našem převodu stačí použít stejný graf G a $k = n - \ell$. \square



nezávislá množina



vrcholové pokrytí

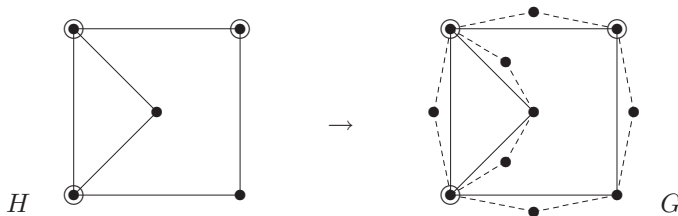
Problém 7.19. DOM (dominující množina)

Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Graf G a přirozené číslo k .

Výstup: Lze v G najít dominující množinu, tj. množinu $D \subseteq V(G)$ takovou, že každý vrchol G má některého souseda v D , o velikosti nejvýše k ? □

Důkaz (náznak): Problém dominující množiny jasně patří do \mathcal{NP} a jeho úplnost je dokázána následujícím schematickým polynomiálním převodem.



Pro daný graf H vytvoříme graf G přidáním, pro každou hranu $e \in E(H)$, nového vrcholu v_e spojeného hranami do obou koncových vrcholů hrany e . (Tak se vlastně z každé hrany stane trojúhelník s třetím novým vrcholem, viz naznačený obrázek.) Číselný parametr k zůstane tentokrát nezměněn. Nyní zbývá dokázat, že G má vrcholové pokrytí velikosti k , právě když H má dominující množinu velikosti také k , což není obtížné. □

Problém 7.20. HC (Hamiltonovský cyklus)

Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Orientovaný graf G .

Výstup: Lze v G najít orientovanou kružnici (cyklus) procházející všemi vrcholy? \square

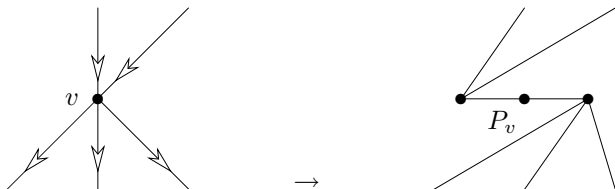
Problém 7.21. HK (Hamiltonovská kružnice)

Následující problém je \mathcal{NP} -úplný:

Vstup: Graf G .

Výstup: Lze v G najít kružnici procházející všemi vrcholy? \square

Důkaz:



Použijeme snadný převod z předchozího problému HC. Každý vrchol v orientovaného grafu H nahradíme třemi vrcholy tvořícími cestu P_v délky 2 v grafu G . Orientované hrany grafu H přicházející do v pak přivedeme do prvního vrcholu cesty P_v , hrany odcházející z v naopak vedeme z posledního vrcholu cesty P_v . \square

7.4 Příběh problému vrcholového pokrytí

Bylo nebylo, jednou se dva slovní inženýři (při surfování na moři?) začali zabývat otázkou, proč dva tak „podobné“ problémy jako vrcholové pokrytí a dominující množina mají (přestože oba \mathcal{NP} -úplné) tak rozdílné algoritmické chování. . .

Ale dost pohádek, více konkrétních informací čtenář najde v [R. Downey and M. Fellows, Parameterized complexity, Springer 1999]. Mimo jiné se dozví, že tato zdánlivě okrajová otázka dala vzniknout zcela novému pohledu na výpočetní složitost problémů, který jde „jaksi mimo“ klasickou polynomiální hierarchii a umožňuje docela rozumně řešit i některé problémy, které jsou jinak \mathcal{NP} -těžké. □

Takže v čem spočívá zásadní rozdíl v našich znalostech o řešení problémů dominující množiny a vrcholového pokrytí?

- Pokud se v analýze zaměříme na hodnotu parametru k vstupu, tak dominující množinu velikosti k stejně nedokážeme nalézt rychleji než probráním **prakticky všech k -tic** vrcholů grafu G .

To je i pro malé fixní hodnoty k , třeba $k = 10, 20$ v praxi neproveditelné. □

- Avšak vrcholové pokrytí velikosti k dokážeme nalézt jednoduchým algoritmem v čase $O(2^k \cdot n)$, což pro malé fixní hodnoty k dává skvěle **použitelný lineární algoritmus!**

Algoritmus 7.23. k -VC (vrcholové pokrytí)

Pro **fixní** k vyřešíme následující problém.

Vstup: Graf G .

Výstup: Lze v G najít vrcholové pokrytí o velikosti nejvýše k ? \square

Pro inicializaci položíme $C = \emptyset$ a $F = E(G)$.

- Pokud $F = \emptyset$, vrátíme C jako vrcholové pokrytí.
Jinak pokud $|C| \geq k$, vrátíme odpověď NE.
- Vybereme libovolnou hranu $f = uv \in F$ a pro oba její konce $x = u, v$ uděláme:
 - $C' = C \cup \{x\}$ a F' vytvoříme z F odebráním všech hran vycházejících z vrcholu x v G .
 - Rekurzivně zavoláme tento algoritmus pro G, C' a F' . \square

Kolik tento algoritmus provede rekurzivních volání celkem? Každý průchod generuje dvě další volání, ale jen do **fixní hloubky** k , takže ve výsledku bude čas výpočtu jen $O(2^k \cdot n)$.

Poznámka: Dnes je již známo, že faktor 2^k lze promyšlenějším přístupem „vylepšit“ na mnohem menší základ mocniny. (2006: 1.2738^k)