

9 Krátké povídání o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zaměříme lehce na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci...

Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Pochopitelně hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.

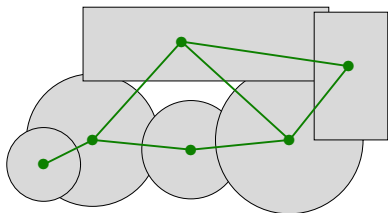


Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

9.1 Průnikové a intervalové grafy

Definice 9.1. Průnikovým grafem množinového systému \mathcal{M} nazveme graf $I_{\mathcal{M}}$ na vrch. $V = \mathcal{M}$ s množinou hran $E = \{\{A, B\} \subset \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$.

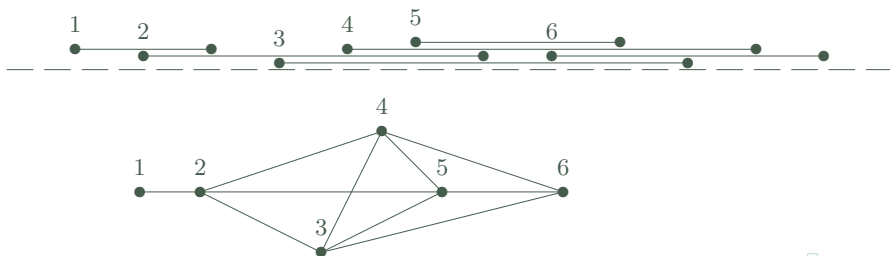


Fakt: Průnikové grafy (určitého typu) jsou vždy uzavřené na indukované podgrafy.

Fakt: Každý jednoduchý graf je isomorfní průnikovému grafu nějakého systému množin. Stačí zvolit soubor hran incidentních s vrcholem x za množinu M_x reprezentující x .

Intervalové grafy

Pro začátek se podíváme na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka INT).

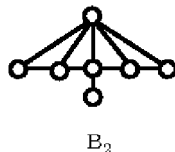
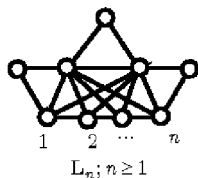
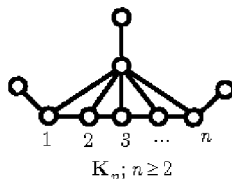
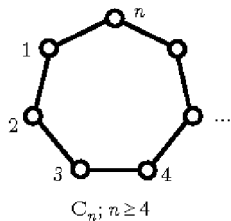


Vzpomeňte si, že s intervalovými grafy jsme se vlastně setkali už v Problému 5.5. □

Lema 9.2. Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má *chordu*.

Věta 9.3. Třídou všech intervalových grafů lze charakterizovat pomocí násled. tvrzení. \square

- Graf je intervalový právě když neobsahuje žádný z následujících zakázaných indukovaných podgrafů:

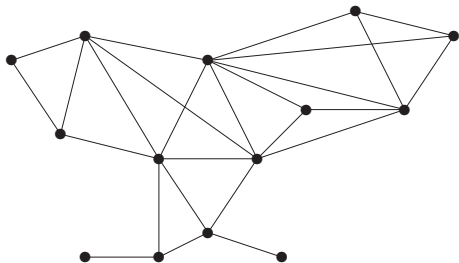


\square

- Graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou kružnici C_4 a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.

9.2 Chordální grafy

Definice: Graf G je *chordální* pokud neobsahuje *indukovanou* kružnici delší než tři. Například:



□

Věta 9.4. Každý chordální graf G obsahuje *simpliciální* vrchol, tj. vrchol s takový, že všichni sousedé s tvoří *kliku* v G . □

Důkaz: Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu G .

Řekneme, že graf H je *bisimpliciální*, pokud H je úplný nebo H obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

Přímým důsledkem Věty 9.4 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu; jedná se o seřazení jeho vrcholů do posloupnosti v_1, v_2, \dots, v_n tak, že každé v_i , $i = 2, \dots, n$, je simpliciální v podgrafu indukovaném na v_1, \dots, v_{i-1} .

Fakt: Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů. \square

Věta 9.5. *Graf G je chordální právě když G je průnikovým grafem podstromů ve vhodném stromě.* \square

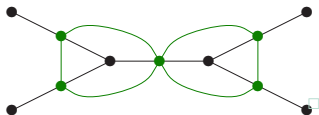
Důkaz (náznak ve směru doprava): Povedeme indukci podle počtu vrcholů G . Báze pro jeden vrchol je zřejmá. Navíc zřejmě každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě musí být chordální.

Jinak necht' v je simpliciální vrchol chordálního grafu G . Indukcí sestrojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu $G - v$. Pak sousedé v tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu $G - v$ se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat v a bude překryt reprezentanty sousedů v . \square

9.3 Třídy průnikových grafů

Zde si uvedeme jen stručný neformální přehled některých typů průnikových grafů, které jsou běžně studovány.

- *Hranový* graf je průnikovým grafem hran v běžném grafu.



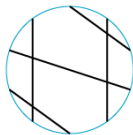
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici. □
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.



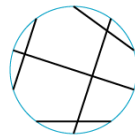
P_4



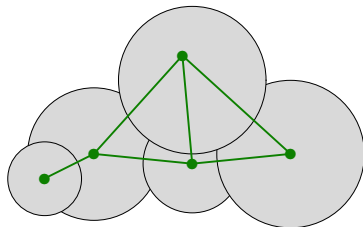
C_5



P_4

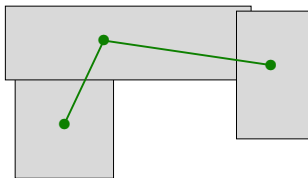


- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).

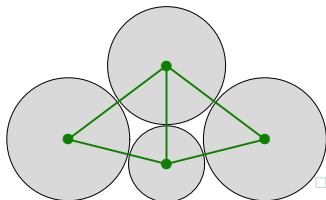


□

- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.

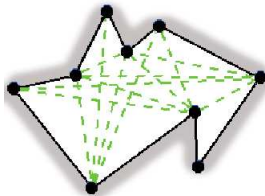


- *Dotykové* ... grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.



Věta 9.6. (Koebe) *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.* □

- Jiné, tzv. *viditelnostní* grafy nejsou definovány průniky objektů, ale jejich vzájemnou viditelností v geometrickém světě. Použití nacházejí například při plánování cesty autonomního robota.



9.4 Průnikové grafy křivek a úseček

Definice: *Niťovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

Tvrzení 9.7. *Každý rovinný graf je niťový.* □

Tvrzení 9.8. *Existují grafy, které jsou niťové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.* □

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání niťových grafů velmi algoritmicky náročné. Vzhledem k Tvrzení 9.8 je mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy \mathcal{NP} , než jeho těžkost, [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

Věta 9.9. *Problém rozpoznat, zda daný graf je niťový, je \mathcal{NP} -úplný.* □

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je \mathcal{NP} -těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy \mathcal{NP} zůstává otevřená kvůli následujícímu.

Tvrzení 9.10. *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.* □

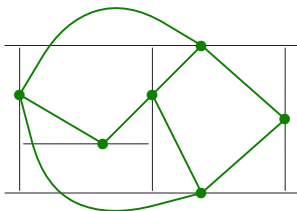
Hypotéza 9.11. Je každý rovinný graf úsečkovým grafem?

„Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:

Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.

(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)



□

Věta 9.12. *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů, neboť již:

Věta 9.13. *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je \mathcal{NP} -úplný.* □