

## 7. Parametrické úlohy o dvou nezávislých náhodných výběrech z normálních rozložení

**7.1. Motivace:** V této situaci je naším úkolem porovnat střední hodnoty či rozptyly dvou normálních rozložení na základě znalosti dvou nezávislých náhodných výběrů pořízených z těchto rozložení. Zpravidla konstruujeme intervaly spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot respektive hodnotíme shodu středních hodnot pomocí dvouvýběrového t-testu či dvouvýběrového z-testu a shodu rozptylů pomocí F-testu.

### 7.2. Věta: Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů

Nechť  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , přičemž  $n_1 \geq 2$  a  $n_2 \geq 2$ . Označme  $M_1, M_2$  výběrové průměry,  $S_1^2, S_2^2$  výběrové rozptyly a  $s_*^2 =$

$\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$  vážený průměr výběrových rozptylů. Pak platí:

a) Statistiky  $M_1 - M_2$  a  $s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$  jsou stochasticky nezávislé.

b) 
$$U = \frac{M_1 - M_2 - \mu_1 + \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o  $\mu_1 - \mu_2$ , když  $\sigma_1^2$  a  $\sigma_2^2$  známe.)

c) Jestliže  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$ , pak  $K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ .

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o neznámém společném rozptylu  $\sigma^2$ .)

d) Jestliže  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$ , pak  $T = \frac{M_1 - M_2 - \mu_1 + \mu_2}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ .

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o  $\mu_1 - \mu_2$ , když  $\sigma_1^2$  a  $\sigma_2^2$  neznáme, ale víme, že jsou shodné.)

e)  $F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ .

(Pivotová statistika F slouží k řešení úloh o  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ .)

### Důkaz:

ad a) Nebudeme provádět.

ad b)  $M_1 - M_2$  je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry

$$E(M_1 - M_2) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$D(M_1 - M_2) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2.$$

U se získá standardizací  $M_1 - M_2$ .

ad c)  $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$  a  $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, tedy  $K = K_1 + K_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ .

$$\text{ad d) } U = \frac{M_1 - M_2 - \mu_1 + \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1), \quad K = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

jsou stochasticky nezávislé, protože  $M_1 - M_2$  a  $S_*^2$  jsou stochasticky nezávislé.

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n_1 + n_2 - 2}}} = \frac{M_1 - M_2 - \mu_1 + \mu_2}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

ad e)  $K_1 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$  a  $K_2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$  jsou stochasticky

nezávislé náhodné veličiny, tedy  $F = \frac{\frac{K_1}{n_1 - 1}}{\frac{K_2}{n_2 - 1}} = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ .

**Příklad:** Necht' jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení  $N(0,28; 0,09)$  a má rozsah 16, druhý pochází z rozložení  $N(0,25; 0,04)$  a má rozsah 25. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude větší než výběrový průměr 2. výběru?

### Řešení:

$$\begin{aligned}
P(M_1 > M_2) &= P(M_1 - M_2 > 0) = 1 - P(M_1 - M_2 \leq 0) \\
&= 1 - P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) \\
&= 1 - P\left(U \leq \frac{-0,28 + 0,25}{\sqrt{\frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25}}}\right) = 1 - P(U \leq -0,35294) = 1 - \Phi(-0,35) = \Phi(0,35) = 0,63683
\end{aligned}$$

S pravděpodobností přibližně 63,7% je výběrový průměr 1. výběru větší než výběrový průměr 2. výběru.

### Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistika  $M_1 - M_2$  se podle bodu (a) řídí rozložením  $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ ,

kde  $\mu_1 - \mu_2 = 0,28 - 0,25 = 0,03$ ,  $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0,09}{16} + \frac{0,04}{25} = 0,007225$ , tj. statistika  $M_1 - M_2 \sim N(0,03; 0,007225)$ .

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případě. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme  $= 1 - \text{INormal}(0; 0,03; \text{sqrt}(0,007225))$ .

V proměnné Prom1 se objeví hodnota 0,637934.

### 7.3. Věta: Interval spolehlivosti pro parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/\sigma_2^2$

Uvedeme přehled vzorců pro meze  $100(1-\alpha)\%$  empirických intervalů spolehlivosti pro parametrické funkce  $\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/\sigma_2^2$ .

a) Interval spolehlivosti pro  $\mu_1 - \mu_2$ , když  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  známe (využití pivotové statistiky U)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = (m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2}, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha/2})$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = (m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha}, \infty)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = (-\infty, m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{1-\alpha})$$

b) Interval spolehlivosti pro  $\mu_1 - \mu_2$ , když  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  neznáme, ale víme, že jsou shodné (využití pivotové statistiky T)

Oboustranný:

$$(d, h) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2), m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2))$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2), \infty)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = (-\infty, m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2))$$

c) Interval spolehlivosti pro společný neznámý rozptyl  $\sigma^2$  (využití pivotové statistiky K)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left( \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)}, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left( \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left( -\infty, \frac{(n_1 + n_2 - 2)s_*^2}{\chi^2_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)} \right)$$

d) Interval spolehlivosti pro podíl rozptylů  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  (využití pivotové statistiky F)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left( \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left( \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left( -\infty, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

**Upozornění:** Není-li v bodě (b) splněn předpoklad o shodě rozptylů, lze sestavit aspoň přibližný  $100(1-\alpha)\%$  interval spolehlivosti pro  $\mu_1 - \mu_2$ .

V tomto případě má statistika T přibližně rozložení  $t(v)$ , kde počet stupňů vol-

nosti  $v = \frac{\frac{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}{s_1^2/n_1} + \frac{s_2^2/n_2}{s_2^2/n_2}}{\frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1} + \frac{s_2^2/n_2}{s_2^2/n_2}}$ . Není-li v celé číslo, použijeme v tabulkách kvan-

tilů Studentova rozložení lineární interpolaci.

**7.4. Příklad:** Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru (v g/l). Z první nádrže bylo odebráno 25 vzorků, z druhé nádrže 10 vzorků. Byly vypočteny realizace výběrových průměrů a rozptylů:  $m_1 = 34,48$ ,  $m_2 = 35,59$ ,  $s_1^2 = 1,7482$ ,  $s_2^2 = 1,7121$ . Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozložení  $N(\mu_1, \sigma^2)$  a  $N(\mu_2, \sigma^2)$ . Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot  $\mu_1 - \mu_2$ .

### Řešení:

Úloha vede na vzorec 7.3. (b). Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů a najdeme odpovídající kvantily Studentova rozložení:

$$s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{24 \cdot 1,7482 + 9 \cdot 1,7121}{33} = 1,7384, \quad t_{0,975}(33) = 2,035$$

Dosadíme do vzorců pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti:

$$d = m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34,48 - 35,59 - \sqrt{1,7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2,035 = -2,114$$

$$h = m_1 - m_2 + s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) =$$

$$= 34,48 - 35,59 + \sqrt{1,7384} \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10}} \cdot 2,035 = -0,106$$

$-2,114 \text{ g/l} < \mu_1 - \mu_2 < -0,106 \text{ g/l}$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

### Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případě.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

=34,48-35,59-

`sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)`

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

=34,48-35,59+

`sqrt((24*1,7482+9*1,7121)/33)*sqrt((1/25)+(1/10))*VStudent(0,975;33)`

	1	2
	d	h
1	-2,11368	-0,10632

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy  $-2,114 \text{ g/l} < \mu_1 - \mu_2 < -0,106 \text{ g/l}$ .

**7.5. Příklad:** V předešlém příkladě nyní předpokládáme, že dané dva náhodné výběry pocházejí z rozložení  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.

**Řešení:**

Úloha vede na vzorec 7.3. (d).

$$d = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{F_{0,975}(24,9)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{3,6142} = 0,28$$

$$h = \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{F_{0,025}(24,9)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{1 / F_{0,975}(9,24)} = \frac{1,7482 / 1,7121}{1 / 2,7027} = 2,76$$

$0,28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2,76$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

**Výpočet pomocí systému STATISTICA:**

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případě.

Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme

$$=(1,7482/1,7121)/VF(0,975;24;9)$$

(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-quantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)

Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme

$$=(1,7482/1,7121)/VF(0,025;24;9)$$

	1	2
	d	h
1	0,282521	2,759698

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí:  $0,28 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 2,76$ .

**7.6. Definice: Jednotlivé typy testů o parametrických funkcích  $\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 / \sigma_2^2$**

a) Necht'  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  je na něm nezávislý náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , přičemž  $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$  a  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  známe. Necht' c je konstanta.

Test  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$  se nazývá **dvouvýběrový z-test**.

b) Necht'  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_1, \sigma^2)$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , přičemž  $n_1 \geq 2$  a  $n_2 \geq 2$  a  $\sigma^2$  neznáme. Necht' c je konstanta.

Test  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$  se nazývá **dvouvýběrový t-test**.

c) Necht'  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , přičemž  $n_1 \geq 2$  a  $n_2 \geq 2$ .

Test  $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  proti  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$  se nazývá **F-test**.

## Provedení testů o parametrických funkcích $\mu_1 - \mu_2$ , $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$ pomocí kritického oboru

### a) Provedení dvouvýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria  $t_0 = \frac{\bar{M}_1 - \bar{M}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ . Stanovíme kritický

obor  $W$ . Pokud  $t_0 \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$  a přijímáme  $H_1$ .

**Oboustranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( -\infty, -u_{1-\alpha/2} \right) \cup \left( u_{1-\alpha/2}, \infty \right)$ .

**Levostranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 < c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( -\infty, -u_{1-\alpha} \right)$ .

**Pravostranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 > c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( u_{1-\alpha}, \infty \right)$ .

### b) Provedení dvouvýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria  $t_0 = \frac{\bar{M}_1 - \bar{M}_2 - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ . Stanovíme kritický

obor  $W$ . Pokud  $t_0 \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$  a přijímáme  $H_1$ .

**Oboustranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( -\infty, -t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \right) \cup \left( t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}, \infty \right)$ .

**Levostranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 < c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( -\infty, -t_{1-\alpha, n_1+n_2-2} \right)$ .

**Pravostranný test:** Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 > c$ . Kritický obor má tvar:  $W = \left( t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}, \infty \right)$ .

### c) Provedení F-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria  $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ . Stanovíme kritický obor  $W$ .

Pokud  $t_0 \in W$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$  a přijímáme  $H_1$ .

**Oboustranný test:** Testujeme  $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  proti  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ . Kritický obor má

$$\text{tvar: } W = \left(0, F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right) \cup \left(F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \infty\right)$$

**Levostranný test:** Testujeme  $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  proti  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ . Kritický obor má

$$\text{tvar: } W = \left(0, F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\right)$$

**Pravostranný test:** Testujeme  $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  proti  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ . Kritický obor má

$$\text{tvar: } W = \left(F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1), \infty\right)$$

**7.7. Příklad:** V restauraci "U bílého koníčka" měřili ve 20 případech čas obsluhy zákazníka. Výsledky v minutách: 6, 8, 11, 4, 7, 6, 10, 6, 9, 8, 5, 12, 13, 10, 9, 8, 7, 11, 10, 5. V restauraci "Zlatý lev" bylo dané pozorování uskutečněno v 15 případech s těmito výsledky: 9, 11, 10, 7, 6, 4, 8, 13, 5, 15, 8, 5, 6, 8, 7. Za předpokladu, že uvedené hodnoty pocházejí ze dvou normálních rozložení, na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnoty doby obsluhy jsou v obou restauracích stejné.

### Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme nulovou hypotézu  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  proti oboustranné alternativě  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ . Je to úloha na dvouvýběrový t-test. Před provedením tohoto testu je však nutné pomocí F-testu ověřit shodu rozptylů. Na

hladině významnosti 0,05 tedy testujeme  $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  proti  $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ . Nejprve

vypočteme  $m_1 = 8,25$ ,  $m_2 = 8,13$ ,  $s_1^2 = 6,307$ ,  $s_2^2 = 9,41$ ,

$s_*^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{19 \cdot 6,307 + 14 \cdot 9,41}{33} = 7,623$ . Podle 7.6. (c) vypočteme

realizaci testové statistiky:  $t_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6,307}{9,41} = 0,6702$ . Stanovíme kritický obor:

$$\begin{aligned} W &= \left(0, F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right) \cup \left(F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), \infty\right) = \left(0, F_{0,025}(9,14)\right) \cup \left(F_{0,925}(9,14), \infty\right) \\ &= \left(0,1 / F_{0,925}(14,19)\right) \cup \left(F_{0,925}(9,14), \infty\right) = \left(0,1 / 2,649\right) \cup \left(2,8607, \infty\right) = \left(0; 0,3778\right) \cup \left(2,8607, \infty\right) \end{aligned}$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Rozptyly tedy můžeme považovat za shodné.



Nyní se vrátíme k dvouvýběrovému t-testu. Podle 7.6. (b) vypočteme realizaci testové statistiky:  $t_0 = \frac{m_1 - m_2 - \delta}{s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{8,25 - 3,13}{\sqrt{7,623} \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{15}}} = 0,124$ . Stanovíme kritický

obor:

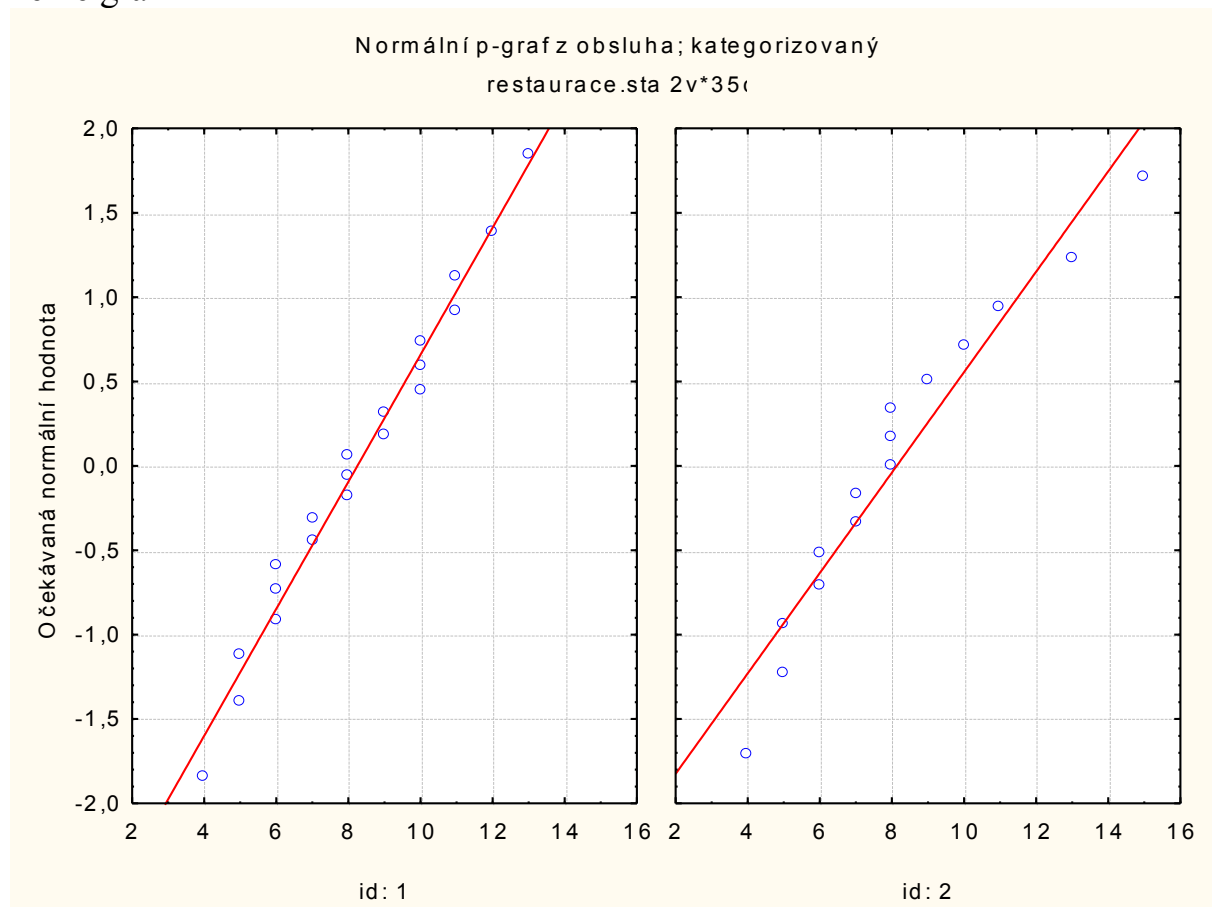
$$W = \left( -\infty, -t_{1-\alpha/2} \sqrt{n_1 + n_2 - 2} \right) \cup \left( t_{1-\alpha/2} \sqrt{n_1 + n_2 - 2}, \infty \right) = \left( -\infty, -t_{0,975} \sqrt{35} \right) \cup \left( t_{0,975} \sqrt{35}, \infty \right) = \left( -\infty, -2,035 \right) \cup \left( 2,035, \infty \right)$$

Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

### Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných a 35 případech. První proměnnou nazveme OBSLUHA, druhou ID. Do proměnné OBSLUHA napíšeme nejprve doby obsluhy v první restauraci a poté doby obsluhy ve druhé restauraci. Do proměnné ID, která slouží k rozlišení první a druhé restaurace, napíšeme 20 krát jedničku a 15 krát dvojku.

Pomocí NP-grafu ověříme normalitu dat v obou skupinách. Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – Proměnné OBSLUHA, OK, Kategorizovaný – Kategorie X, zaškrtneme Zapnuto, Změnit proměnnou – ID, OK. Dostaneme graf



V obou případech se tečky odchylují od přímky jenom málo. Předpoklad o normálním rozložení dat v obou skupinách je oprávněný.

Nyní provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:

Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK,

Proměnné – Závislé proměnné OBSLUHA, Grupovací proměnná ID – OK.

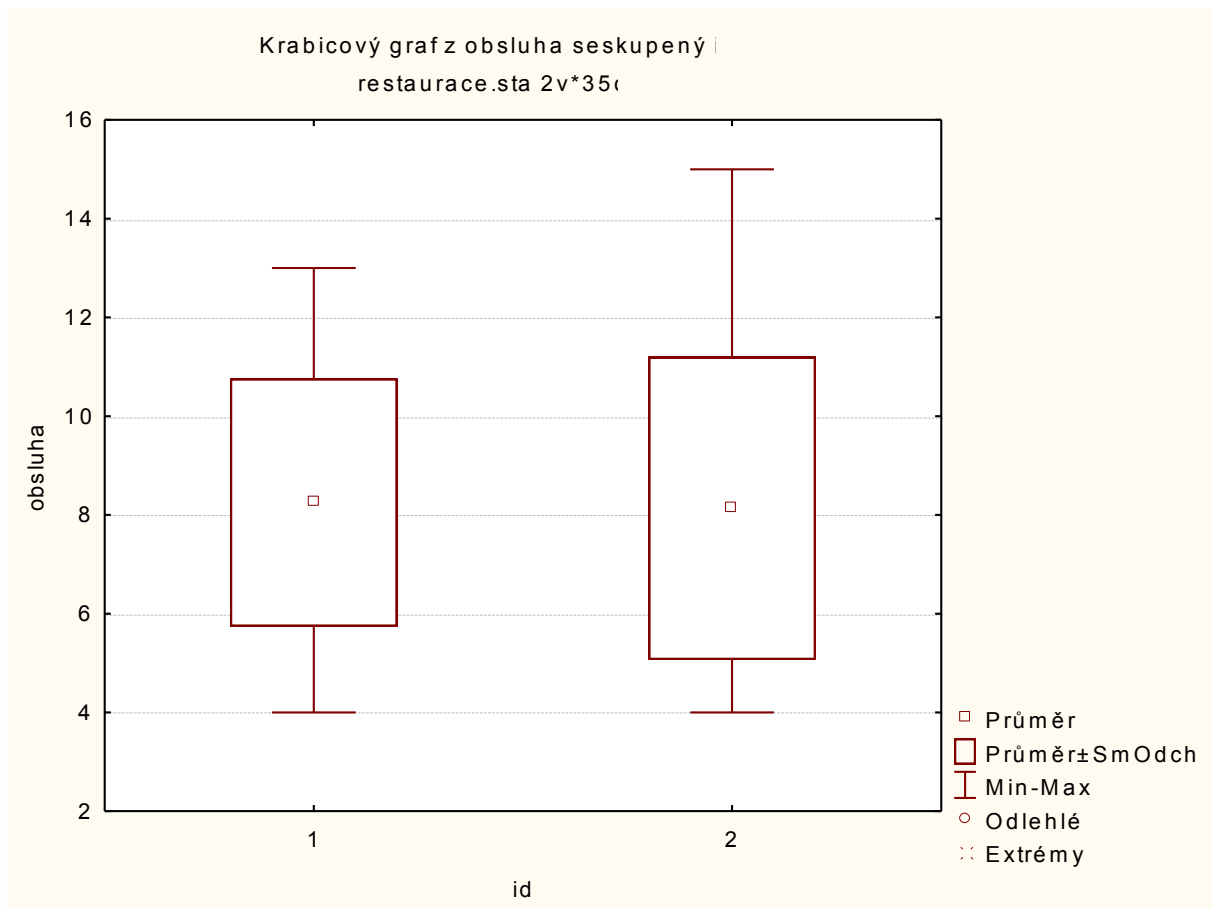
Po kliknutí na tlačítko Souhrn dostaneme tabulku

Proměnná	t-testy; grupováno: ID (restaurace)										
	Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
	Průměr 1	Průměr 2	t	sv	p	Poč.plat 1	Poč.plat. 2	Sm.odch. 1	Sm.odch. 2	F-poměr rozptyly	p rozptyly
OBSLUHA	8,250000	8,133333	0,123730	33	0,902279	20	15	2,510504	3,067495	1,492952	0,410440

Vidíme, že testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,492952 (je to převrácená hodnota k číslu 0,6702, které jsme vypočítali při ručním postupu), odpovídající p-hodnota je 0,41044, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)

Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 0,12373, počet stupňů volnosti je 33, odpovídající p-hodnota 0,902279, tedy hypotézu o shodě středních hodnot nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl ve středních hodnotách dob obsluhy v restauracích "U bílého koníčka" a „Zlatý lev“.

Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Z grafu je vidět, že průměrná doba obsluhy v první restauraci je nepatrně delší a má menší variabilitu než ve druhé restauraci. Extrémní ani odlehlé hodnoty se zde nevyskytují.

### Cohenův koeficient věcného účinku – doplnění významu dvouvýběrového t-testu:

Nechť  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_1, \sigma^2)$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  je na něm nezávislý náhodný výběr rozložení  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , přičemž  $n_1 \geq 2$  a  $n_2 \geq 2$  a  $\sigma^2$  neznáme. Nechť  $c$  je konstanta.

Testujeme  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$  proti  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq c$ . Označme  $m_1, m_2$  realizace výběrových průměrů hodnot dané veličiny v těchto dvou skupinách,  $s_1^2, s_2^2$  realizace

výběrových rozptylů a  $s_*^2 = \frac{n_1 - 1 \cdot \widehat{s}_1^2 + n_2 - 1 \cdot \widehat{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$  realizaci váženého průměru

výběrových rozptylů.

Cohenův koeficient  $d$  vypočteme podle vzorce:  $d = \frac{|m_1 - m_2 - c|}{s_*}$ .

Tento koeficient slouží k posouzení velikosti rozdílu průměrů, který je standardizován pomocí odmocniny z váženého průměru výběrových rozptylů. Jedná se o tzv. **věcnou významnost** neboli **velikost účinku** skupiny na variabilitu hodnot

sledované náhodné veličiny. Velikost účinku hodnotíme podle následující tabulky:

Hodnota d	účinek
aspoň 0,8	velký
mezi 0,5 až 0,8	střední
mezi 0,2 až 0,5	malý
pod 0,2	zanedbatelný

(Uvedené hodnoty nemají samozřejmě absolutní platnost, posouzení, jaký účinek považujeme za velký či malý, závisí na kontextu.)

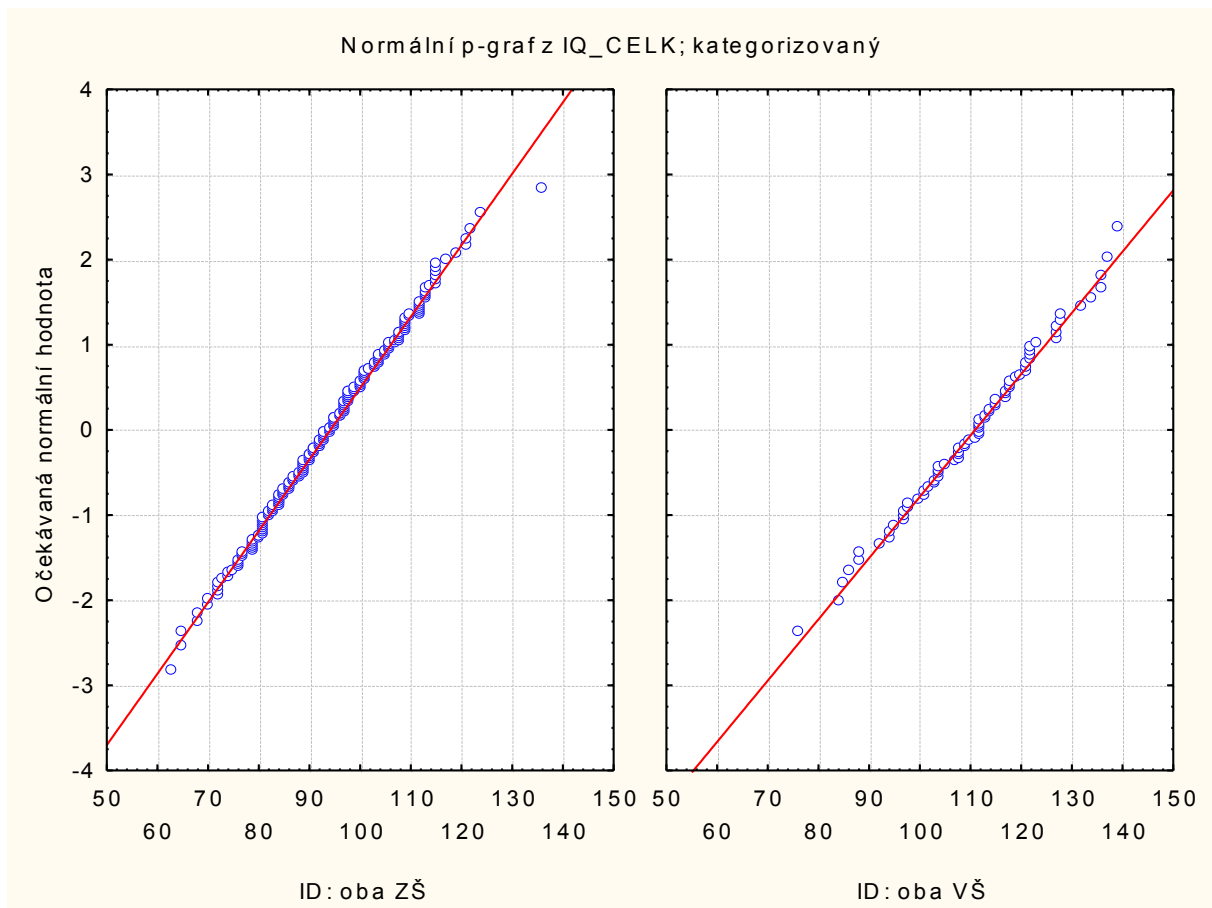
Je zapotřebí si uvědomit, že při dostatečně velkých rozsazích náhodných výběrů i malý rozdíl ve výběrových průměrech způsobí zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti  $\alpha$ , i když z věcného hlediska tak malý rozdíl nemá význam. Naopak, máme-li výběry malých rozsahů, pak i značně velký rozdíl ve výběrových průměrech nemusí vést k zamítnutí nulové hypotézy na hladině významnosti  $\alpha$ .

#### **Příklad:**

Máme k dispozici údaje o celkovém IQ 856 žáků ZŠ. Zajímáme se jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají pouze základní vzdělání (je jich 296) a jednak o skupinu dětí, jejichž oba rodiče mají vysokoškolské vzdělání (těch je 75). Na hladině významnosti 0,05 budeme testovat hypotézu, že střední hodnota celkového IQ je v obou skupinách stejná a také vypočteme Cohenův koeficient věcného účinku.

#### **Řešení:**

Normalitu dat v obou skupinách posoudíme pomocí N-P plotu:

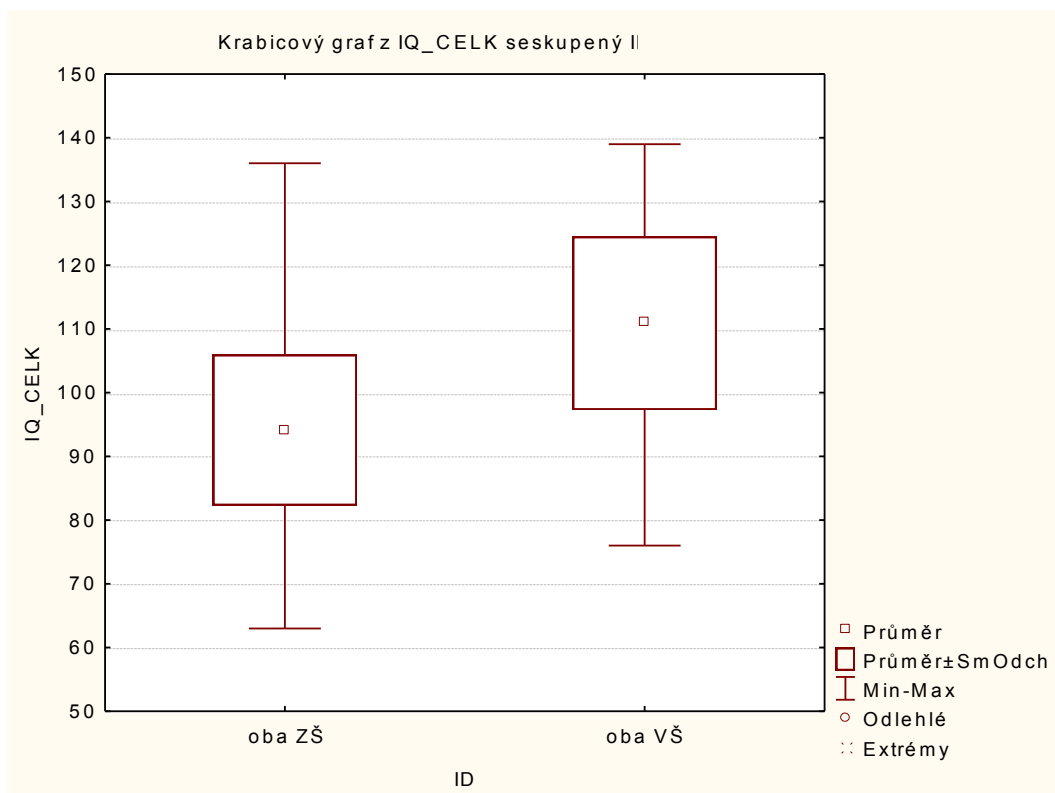


Vzhled N- P plotů v obou skupinách podporuje domněnku o normalitě dat.  
 Provedeme dvouvýběrový t-test:

t-testy; grupováno: ZŠ a VŠ (IQ)											
Skup. 1: oba ZŠ											
Skup. 2: oba VŠ											
Proměnná	Průměr oba ZŠ	Průměr oba VŠ	t	sv	p	Poč. plat oba ZŠ	Poč. plat. oba VŠ	Sm. odch. oba ZŠ	Sm. odch. oba VŠ	F-poměr Rozptyly	p Rozptyly
IQ_CELK	94,13851	110,9067	-10,6295	369	0,000000	296	75	11,82604	13,60164	1,322829	0,110124

Hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože odpovídající p-hodnota je velmi blízká 0 (hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05, p-hodnota F-testu je 0,110124, což je větší než 0,05).

Krabicový diagram:



Vidíme, že průměrné celkové IQ dětí v 1. skupině je 94,1, zatímco ve 2. skupině 110,9. Vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ posoudíme pomocí Cohenova koeficientu.

	1	2	3	4	5	6	7
	n1	n2	m1	m2	s1	s2	d
1	296	75	94,13851	110,9067	11,82604	13,60164	1,374117

Cohenův koeficient nabývá hodnoty 1,37, tudíž vliv skupiny na variabilitu hodnot celkového IQ lze považovat za velký.