GRAFOVÉ ALGORITMY

2005/2006 - 1. termín

1. Malování

Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf. Cesta $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0),\ k \geq 1$ se nazývá **uzavřená**. Uzavřená cesta je **nakreslení**, prochází-li každou hranou právě jednou.

a) **Věta.** G má nakreslení, právě když je stupeň každého vrcholu sudý.

Důkaz. $\Longrightarrow$: Hint : Uvažujme nějaké nakreslení a diskutujme počty příchodů a odchodů z jednotlivých vrcholů.

$\Longleftarrow$: níže uděláme konstruktivně.

Vrchol v je **nasycený** vzhledem k množině hran $F \subseteq E$, je-li každá hrana incidentní s v prvkem množiny F.

b) **Algoritmus :**

V algoritmu se střídají fáze **"vpřed z vrcholu** v**"** a **"zpět"**. Začíná se z libovolného vrcholu $\overline{v}$.

"vpřed z vrcholu v**"** : Z vrcholu v budujeme cestu z dosud neobjevených (coby neorientovaných) hran, které jsou jako orientované (ve směru objevení) ukládany do zásobníku. Nelze-li pokračovat, je vrchol v zřejmě nasycený a přejdeme k fázi "zpět".

"zpět" : Nechť v zásobníku jsou hrany odpovídající cestě $(u_0, \ldots, u_k),\ k \geq 1$. Pokud jsou $u_k, \ldots, u_0$ nasycené, dáme na výstup $(u_k, u_{k-1}), (u_{k-1}, u_{k-2}), \ldots, (u_1, u_0)$ a končíme.

Pokud jsou $u_k, \ldots, u_{l+1}$ nasycené a u_l ne, dáme na výstup

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

odstraníme je ze zásobníku a pokračujeme fází "vpřed z vrcholu $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$" . Doplňte.

c) **Příklad :** Níže je zadán graf seznamem sousedů. Začněte z vrcholu 1 a v seznamech postupujte zleva doprava (průběh algoritmu je jednoznačný). Pro snadné vynechávání objevených hran máme v jednotlivých řádcích i ukazatele zprava doleva i ukazatele z hrany (i, j) na hranu (j, i).

1 : 2 3
2 : 1 3 12 13
3 : 2 4 1 5
4 : 3 5
5 : 4 3 6 8 7 9
6 : 5 7 10 11
7 : 6 5
8 : 5 9
9 : 8 5
10 : 6 11
11 : 10 6
12 : 2 13
13 : 12 2

Místo označení hran dvojicemi (i, j) je číslujte v pořadí jejich objevení.

Průběh algoritmu :

Hrany objevené při "vpřed z 1" : ....

hrany na výstupu při "vzad" : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Diagram :

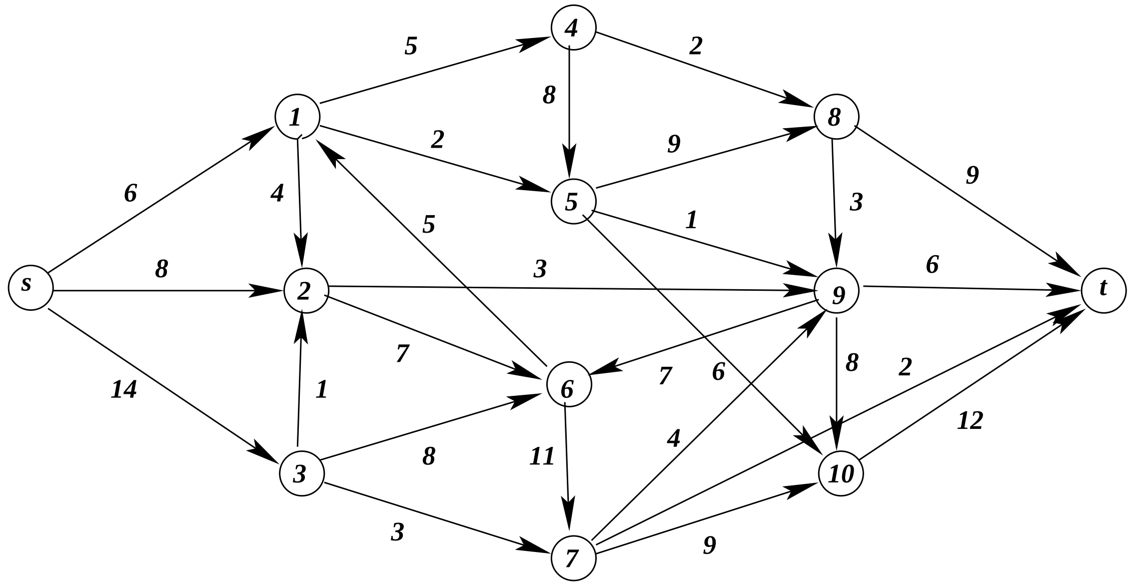
d) Dokažte korektnost algoritmu.

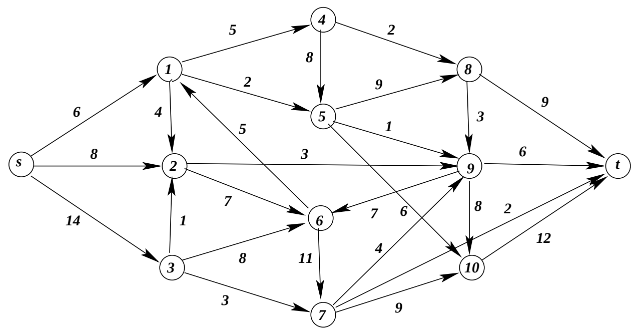
e) Odhadněte složitost algoritmu.

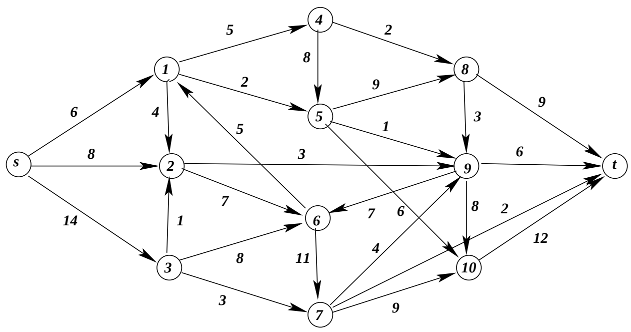
f) Jak uděláme linky z každého (i, j) do (j, i) v čase $\mathrm{O}(m+n)$?

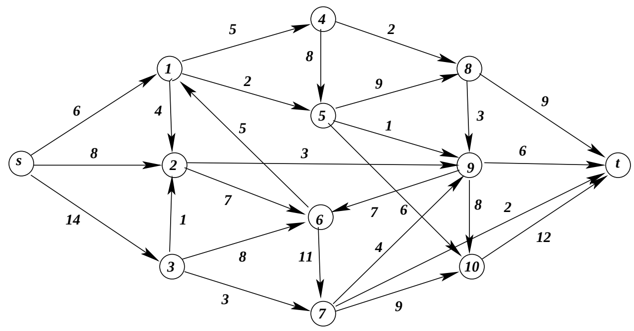
2. Toky v sítích

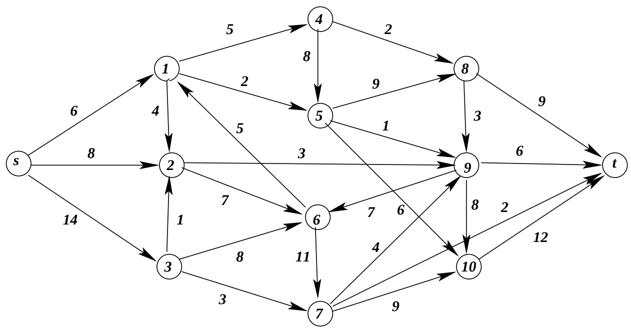
Na síti z obrázku se zdrojem s a cílem t uveďte nějaký "velký" tok. Dále používejte algoritmus Edmonse a Karpa. Na každém řádku vždy vlevo uveďte reziduální graf s nějakou nejkratší $s-t$-cestou, vpravo pak příslušný zvětšený tok.

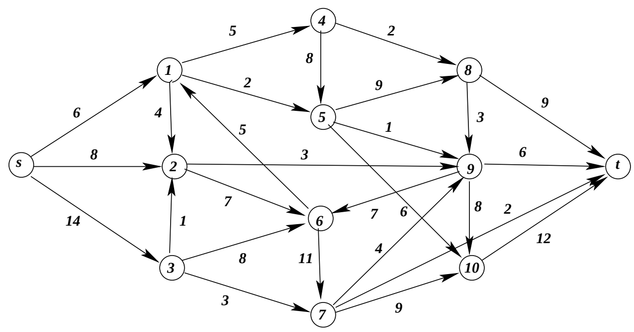


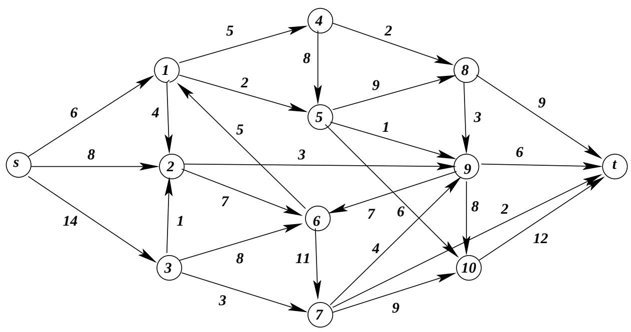


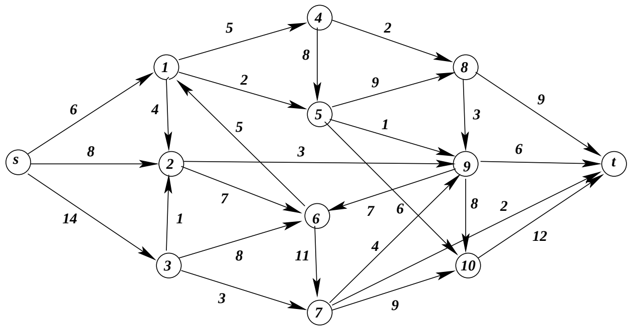
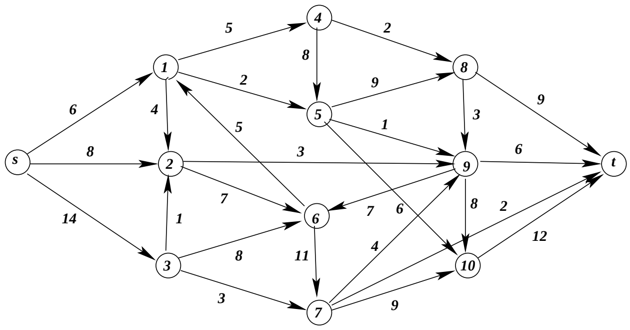
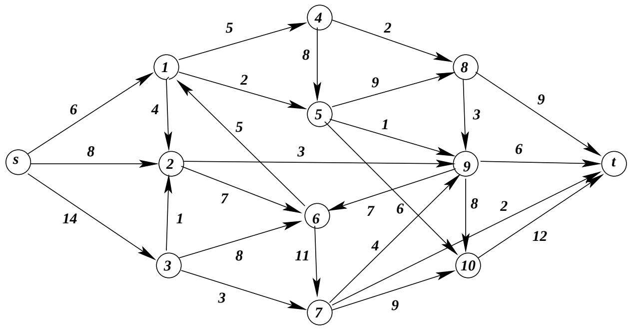
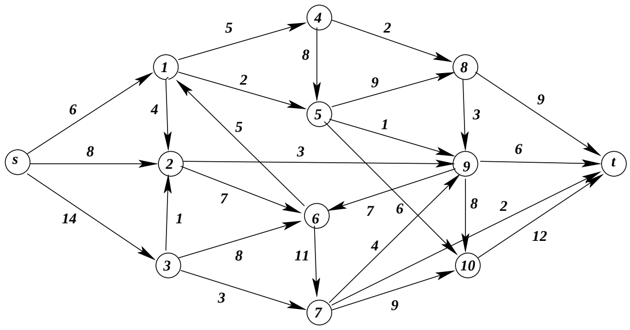
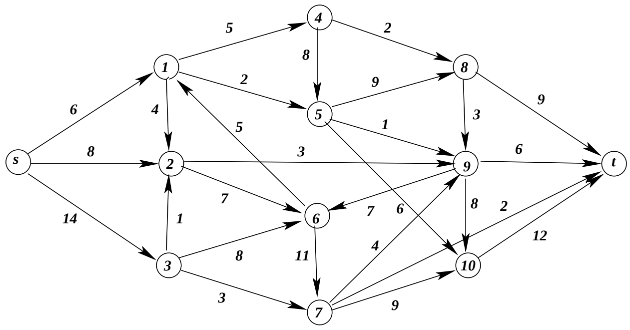
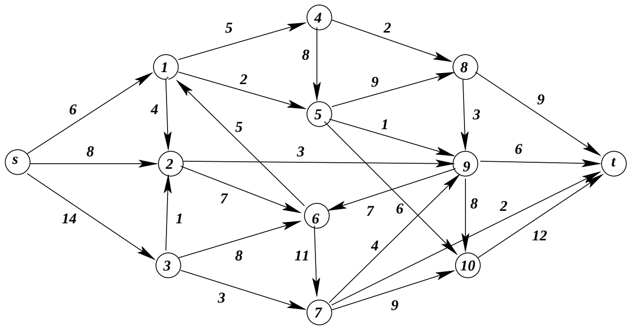
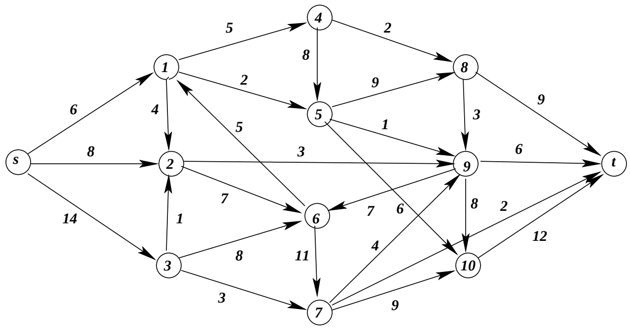
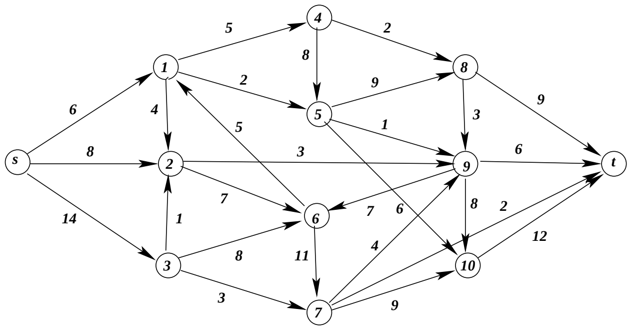
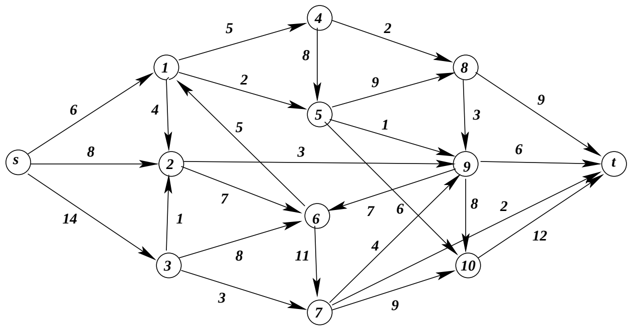
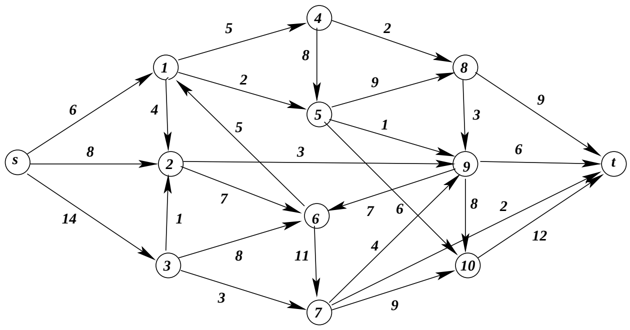











4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

4
5 2
1 8 8
2 9
6 4 5 9
5 3
1
s 8 2 3 9 6 t
7 7 6 8 2
14 1 6
8 11 4 12
3 10
3 7 9

GRAFOVÉ ALGORITMY

2005/2006 - 2. termín

1. Svědomitý zametač

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný multigraf (t.j. připouští se násobné hrany). Cesta $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$, $k \geq 1$ se nazývá **uzavřená**. Uzavřená cesta je **nakreslení**, prochází-li každou hranou právě jednou. Uzavřená cesta je **pokrytí**, prochází-li každou hranou alespoň jednou. $G = (V, E)$ se nazývá **eulerovský**, je-li souvislý a stupeň každého jeho vrcholu je sudý.

Fakt. Multigraf G má nakreslení, právě když je eulerovský. Lze to realizovat v čase $\mathrm{O}(m)$, kde m je počet hran.

Věta. Pro souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho uzavřenou cestu P je ekvivalentní:

(i) P je minimální pokrytí (vzhledem k počtu hran).

(ii) P je pokrytí, libovolná hrana z E je v P použita maximálně dvakrát a množina F těch hran z E, které jsou v P použity vícekrát, je minimální (vzhledem k počtu) s následující vlastnosti :

(*) přidáním disjunktní kopie F ke G vznikne eulerovský multigraf.

Důkaz. a) (i) $\Rightarrow$ (ii) :

b) (ii) $\Rightarrow$ (i) :

Nechť (V, E) je souvislý graf, nechť $H \subseteq V$, $|H| = 2k > 0$. **Párování** množiny H je rozklad $\{h_1, \ldots, h_k\}$, $\{h'_1, \ldots, h'_k\}$ této množiny spolu s cestami

$$c_1 : h_1 \to \ldots \to h'_1 \ ,$$

$$\ldots$$

$$c_k : h_k \to \ldots \to h'_k \ .$$

Minimalita párování se chápe vzhledem k součtu délek příslušných cest.

Lemma. (i) V libovolném multigrafu je počet vrcholů lichého stupně sudý.
(ii) V minimálním párování se žádná hrana nevyskytuje více jak jednou.

c) Důkaz.

Lemma. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Množiny hran minimální vzhledem k (*) jsou právě množiny hran minimálních párování množiny všech vrcholů lichého stupně.

d) Důkaz.

e) Je dán souvislý graf $G = (V, E), |V| = n,\ |E| = m$. **Algoritmus** pro minimální pokrytí :

1. Najdeme množinu L všech vrcholů lichého stupně, nechť $|L| = 2k$ – to umíme v čase ......

2. Spočteme vzdálenosti mezi všemi dvojicemi vrcholů z L – to umíme v čase ....

pomocí ....

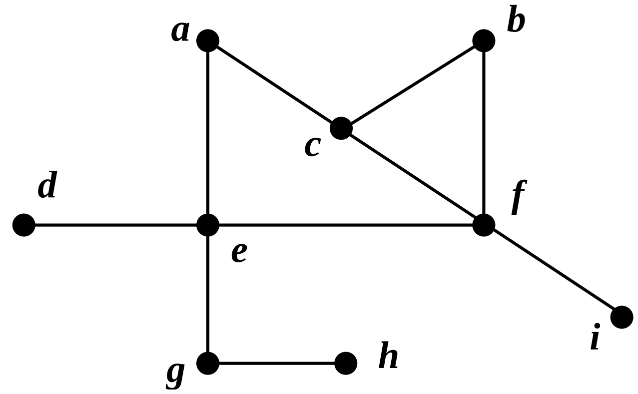
3. Najdeme minimální párování množiny L – to umíme v čase $\mathrm{O}(f(k))$ (fakt). Nechť F je množina jeho hran.

4. Najdeme nakreslení grafu G obohaceného o disj. kopii hran z F.

To umíme v čase ...., neboť máme celkem .... hran.

Celkem je tedy složitost ....

f) Demonstrujte algoritmus na grafu

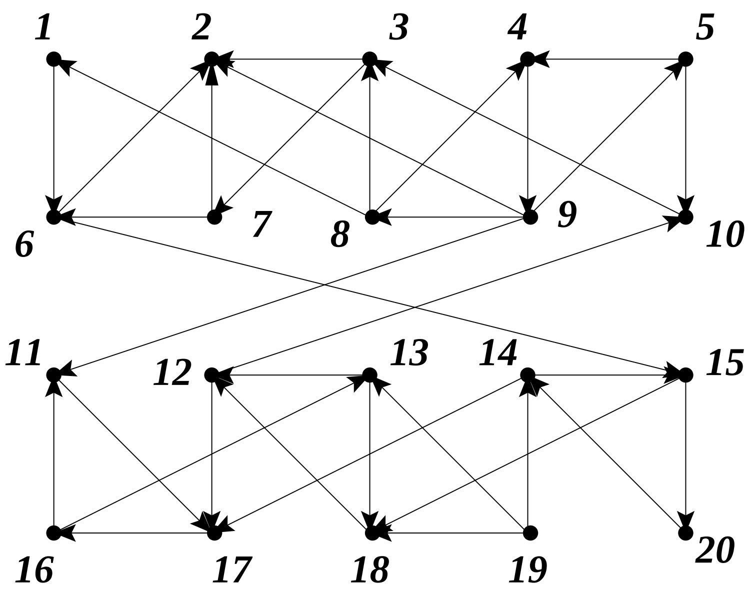


2. Silně souvislé komponenty

Orientovaný graf $G = (V, E),\ V = \{1, \dots, 20\}$ je dán seznamy sousedů :

1 : 6
2 :
3 : 2,7
4 : 9
5 : 4,10
6 : 2,15
7 : 2,6
8 : 1,3,4
9 : 2,5,8,11
10 : 3
11 : 17
12 : 10,17
13 : 12,18
14 : 15,17
15 : 18,20
16 : 11,13
17 : 16
18 : 12
19 : 13,14,18
20 : 14

Obrázek :



a) Aplikujte na graf G průzkum do hloubky. Přitom každý seznam, sousedů procházíme zleva a seznam seznamů shora. Nakreslete příslušný les i s časy objevení a ukončení jednotlivých vrcholů.

b) Připravte si seznamy sousedů pro transponovaný graf. Využijte přitom řádky výše uvedeného seznamu pro G. Nechť položky v každém řádku jsou uspořádány rostoucím způsobem.

c) Dokončete algoritmus pro hledání silně souvislých komponent. Nakreslete příslušný les a v diagramu výše vyznačte komponenty.

d) Uveďte příslušný faktorový graf.

GRAFOVÉ ALGORITMY

2005/2006 - 3. termín

1. Izomorfismus stromů.

Nechť $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou neorientované grafy. Zobrazení $\alpha : V \to V'$ je **izomorfismus** G na G', je-li to bijekce a pro libovolná $u, v \in V$ platí :

$$\{u, v\} \in E \text{ právě když } \{\alpha(u), \alpha(v)\} \in E' \ .$$

Grafy G a G' jsou **izomorfní**, existuje-li mezi nimi izomorfismus.

Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný strom. Nechť V_1 je množina všech vrcholů stromu G stupně 1, nechť pro $V^1 = V \setminus V_1 \neq \emptyset$ je $G^1 = (V^1, \{e \in E \mid e \subseteq V^1\})$. Nechť V_2 je množina všech vrcholů stromu G^1 stupně 1, nechť pro $V^2 = V^1 \setminus V_2 \neq \emptyset$ je $G^2 = (V^2, \{e \in E \mid e \subseteq V^2\})$,... Poslední neprázdný graf je buď jediný vrchol nebo jediná úsečka – hovoříme o **centru** resp. **bicentru** stromu G.

Algoritmus :

1. Pro stromy G a G' spočítáme jejich centra/bicentra. Má-li jeden ze stromů centrum a druhý bicentrum, nejsou izomorfní – konec. Mají-li oba bicentrum, vsadíme do jejich centrální hrany u každého grafu nový vrchol tak, aby oba měli centrum. (Zřejmě jsou původní stromy izomorfní, pravě když jsou izomorfní nové stromy.)

2. Oba stromy orientujeme směrem od jejich centrálních vrcholů. Nechť takto dostaneme patra $1, 2, \ldots, r$ resp. $1, 2, \ldots, r'$, kde v patře 1 jsou právě centrální vrcholy. Pokud $r \neq r'$ nejsou stromy izomorfní – konec.

3. Současně pro oba stromy počínaje patrem r přiřazujeme vrcholům jednotlivých pater jejich **ohodnocení** $o[v]$ a **typ** $t[v]$ takto :

(i) Všem vrcholům patra r dáme ohodnocení λ (= posloupnost délky nula) a typ 1.

(ii) Máme-li určeny typy všech vrcholů k-tého patra ($k = r, \ldots, 2$), ohodnotíme každý vrchol $(k-1)$-ního patra neklesající posloupností typů všech jeho synů. Získaná ohodnocení uspořádáme lexikograficky (tj. jako ve slovníku s prvním slovem λ). Vrcholy s nejmenším ohodnocením budou mít typ 1, další typ 2, atd.

a) **Věta.** Stromy G a G' jsou izomorfní právě když

....

Důkaz.

b) $\Longrightarrow$:

c) $\Longleftarrow$:

d) Demonstrujte algoritmus na příkladě :
Níže jsou stromy G a G' zadány seznamy sousedů.

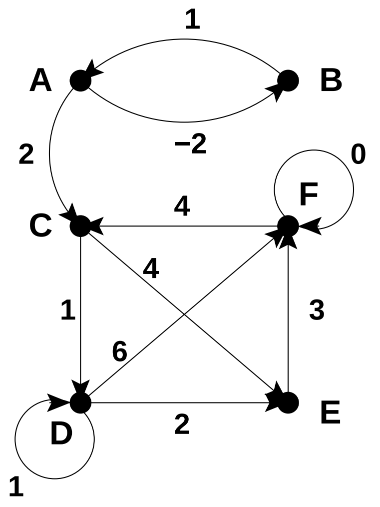
$a : d, f$	$1 : 7$
$b : d$	$2 : 4, 7, 9$
$c : h$	$3 : 5, 7$
$d : a, b$	$4 : 2, 10, 15$
$e : j$	$5 : 3$
$f : a, j, k$	$6 : 13$
$g : n$	$7 : 1, 2, 3$
$h : c, j$	$8 : 9$
$i : o$	$9 : 2, 8, 13$
$j : e, f, h$	$10 : 4, 14, 16, 17$
$k : f, o, p$	$11 : 17$
$l : n$	$12 : 17$
$m : o$	$13 : 6, 9$
$n : g, l, o$	$14 : 10$
$o : i, k, m, n$	$15 : 4, 19$
$p : k, r, s$	$16 : 10$
$q : r$	$17 : 10, 11, 12$
$r : p, q$	$18 : 19$
$s : p$	$19 : 15, 18$

e) Uveďte (až na izomorfismus) všechny neorientované stromy o sedmi vrcholech.

f) Jak hledáte centrum/bicentrum stromu G ? Odhadněte složitost. (Pro snadné vynechávání neorientovaných hran máme pro každou orientovanou hranu (u, v) link na (v, u).)

2. Nejkratší cesty

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je zadaný diagramem



Určete pro každou dvojici vrcholů z množiny $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ délku nejkratší cesty mezi nimi. Jestliže mezi nimi nevede žádná cesta, označte délku jako ∞, jestliže mezi nimi nějaká cesta vede, ale žádná není nejkratší, označte ji $-\infty$.

Použijte (modifikaci) některého z algoritmů kapitoly 26. Musíte skutečně počítat s maticemi řádu 6 ?

Může se vám hodit "matice"

	A	B	C	D	E	F
A		-2	2			
B	1					
C				1	4	
D				1	2	6
E						3
F			4			0