GRAFOVÉ ALGORITMY

2006/7 - 1. termín

1. Izomorfismus na podstrom

Nechť $S = (V, E)$ a $T = (W, F)$ jsou orientované stromy s kořeny v_0 resp. w_0, nechť $V \cap W = \emptyset$. Zobrazení $f : V \to W$ je *homomorfismus* stromu S do stromu T, platí-li

$$(\ \forall\, u, v \in V \ ) \ (\ (u, v) \in E \ \Rightarrow \ (f(u), f(v)) \in F \ ) \ .$$

Úkolem je efektivně zjistit, zda existuje prostý homomorfismus S do T.

Nechť $(V_0, \ldots, V_p)$ je rozklad množiny V podle vzdáleností od v_0 ($V_0 = \{v_0\}$). Podobně pro strom T dostáváme rozklad $(W_0, \ldots, W_q)$.

Nechť pro $v \in V$ je $S(v)$ podstrom stromu S určený vrcholem v (dáme tam vše z S, co je dosažitelné z v), nechť $S[v] = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$. Podobně, pro $w \in W$ definujeme $T(w)$ a $T[w]$.

Definujme relaci $\rho \subseteq V \times W$ vztahem

$$(v, w) \in \rho \text{ právě když}$$

existuje prostý homomorfismus f stromu $S(v)$ do stromu $T(w)$ splňující $f(v) = w$.

Platí :

existuje prostý homomorfismus S do T právě když

....$\in \rho$.

Pro $v \in V$ a $w \in W$ definujeme pomocný (neorientovaný bipartitní) graf

$$G(v, w) = (\ S[v] \cup T[w], \{ \ \{x, y\} \mid x \in S[v], \ y \in T[w], \ (x, y) \in \rho \ \} \ ) \ .$$

Platí : $(v, w) \in \rho$ právě když

v grafu $G(v, w)$ existuje párování splňující... $(*)$

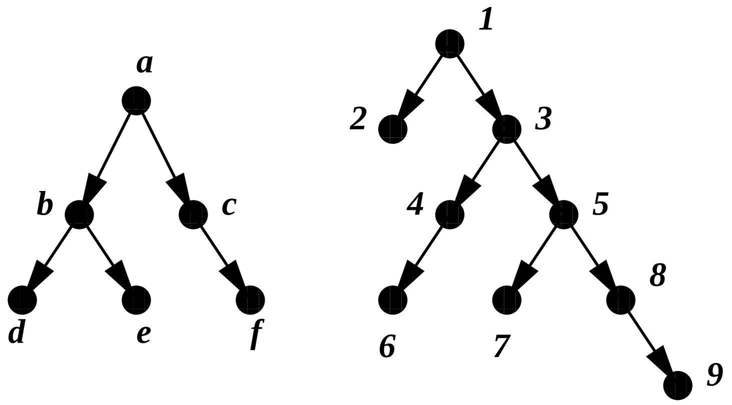
Relaci ρ uchováváme v booleovské (tj. nad $\{0, 1\}$) $V \times W$ matici, v níž položka v řádku v a sloupci w (označujeme ji $\rho(v, w)$) je 1 právě když $(v, w) \in \rho$. Celý problém se tedy redukuje na výpočet této matice. Dokonce ji nepotřebujeme celou, pro $v \in V_i$ nám stačí hodnoty $\rho(v, w)$ pro $w \in W_i \cup \cdots \cup$ ....

Algoritmus :

1 **for** $v \in V_p, \ w \in W$ **do** $\rho(v, w) \longleftarrow 1$ **endfor**

2 **for** $i = p - 1, \ldots, 0, \ v \in V_i, \ w \in W_i \cup \cdots \cup W_{.....}$ **do** spočítej $\rho(v, w)$ podle $(*)$ **endfor**

Spočtěte hledanou matici pro následující stromy :



Kvůli jednoznačnosti výpočtu : tam, kde máme volbu dáváme přednost vrcholům podle uspořádání 1,2,... či $a, b, \ldots$.

Maximální párovaní v bipartitním (neorientovaném) grafu s n vrcholy a m hranami umíme najít v čase .... – zdůvodněte. Poněvadž se možná netrefíte, používejte v dalším $O(\alpha(n, m))$.

Nechť $|V| = s$, $|W| = t$. Nechť k je maximální out-degree vrcholu z S, podobně l pro T. Složitost celého algoritmu je .... – zdůvodněte.

2. Diferenční podmínky.

Uvažujme soustavu m nerovnic n proměnných $x_1, \ldots, x_n$ tvaru

$$x_{j_1} - x_{i_1} \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{j_m} - x_{i_m} \leq b_m$$

kde $1 \leq i_k, j_k \leq n$, $i_k \neq j_k$ a $b_k \in \mathbb{Z}$ pro všechna k, $1 \leq k \leq m$.

Definujeme pro danou soustavu orientovaný graf $G = (V, E)$, kde $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ a $E = \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \leq b \text{ je některá z nerovnic}\} \cup \{(v_0, v_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dále definujeme ohodnocení w hran takto: $w(v_0, v_i) = 0$ a $w(v_i, v_j) = b$ kdykoli $x_j - x_i \leq b$ je některá z nerovnic.

Věta ze strany 542 v brožurce říká :

Obsahuje-li graf příslušný k dané soustavě nerovnic záporně ohodnocený cyklus, nemá daná soustava řešení. Neobsahuje-li tento graf záporně ohodnocený cyklus, má soustava řešení $(\delta(v_0, v_1), \ldots, \delta(v_0, v_n))$.

Uvažujme nerovnice:

$$x_1 - x_2 \leq 1 \tag{1}$$
$$x_3 - x_1 \leq -3 \tag{2}$$
$$x_1 - x_4 \leq 4 \tag{3}$$
$$x_5 - x_3 \leq 5 \tag{4}$$
$$x_2 - x_3 \leq 1 \tag{5}$$

K soustavám nerovnic (1) – (4) a (1) – (5). udejte příslušný graf. Algoritmem Bellman-Ford z vrcholu v_0 a aplikací výše uvedené věty rozhodněte, zda daná soustavy mají řešení. V případě, že některá ze soustav řešení má, uveďte ho.

V každé sérii relaxací bereme hrany v pořadí (v_0, v_1), $(v_0, v_2), \ldots$, pak hrany z podmínek (1),...,(4), resp. (5).

GRAFOVÉ ALGORITMY

2006/7 - 2. termín

1. Minimální pokrytí

Je dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Množina P jeho cest (připouštíme i cesty délky 0) je jeho *pokrytí*, je-li každý vrchol z V na právě jedné cestě z P. Úkolem je v daném acyklickém grafu najít pokrytí minimální kardinality.

Terminologie :

cesta je posloupnost $(v_0, \ldots, v_k)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, $v_0, \ldots, v_k \in V$, $(v_0, v_1), \ldots, (v_{k-1}, v_k) \in E$,
cesta je **prostá**, jsou-li $v_0, \ldots, v_k$ po dvou různá,
smyčka je cesta (v, v),
kružnice je cesta $(v_0, \ldots, v_k, v_0)$, kde $k \in \mathbb{N}$, $v_0, \ldots, v_k$ po dvou různá.

K danému $G = (V, E)$, v tomto okamžiku ne nutně acyklickému, sestrojíme (bipartitní neorientovaný) graf $G' = (\, V \cup V', E' \,)$, kde $V' = \{\, v' \mid v \in V \,\}$ je disjunktní kopie množiny V a $F' = \{\, \{v, w'\} \mid (v, w) \in F \,\}$ pro $F \subseteq E$.

a) Množina F' je párování v G' právě když souvislé komponenty grafu (V, F) jsou tvaru :

....

b) Pro acyklický G je F' je párování v G' právě když množina souvislých komponent grafu (V, F) tvoří

....

c) Pro množinu P cest v G nechť P° značí množinu všech hran na cestách z P. Nechť P je pokrytí a $|P| = k$. Pak $|P^{\circ\prime}| =$ ....

d) Tedy problém hledání minimálního pokrytí v acyklickém grafu je převeden na problém hledání

.... v G'.

e) Tímto je dán **Algoritmus 1**. Odhadněte jeho složitost.

....

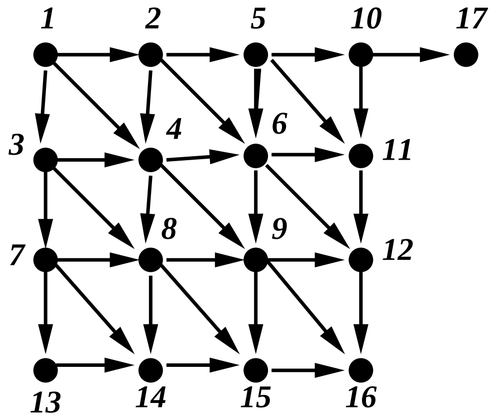
f) Ukažte, že to nemusí fungovat pro graf, který není acyklický.

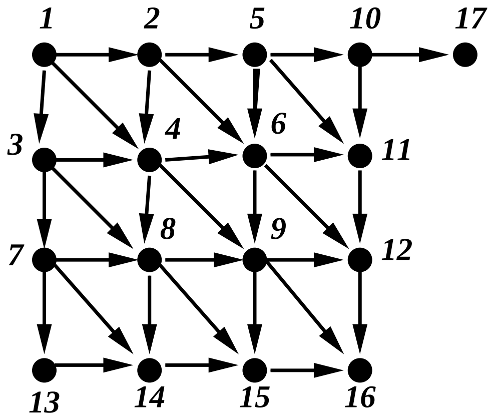
g) Níže je dán graf G a pro vaše pohodlí i G', vše v několika kopiích. V G zvolte pokrytí P s "malým" počtem cest. Vyznačte množinu P' a např. pomocí alternace volných cest ji doplňte na optimální. Dokažte optimalitu.

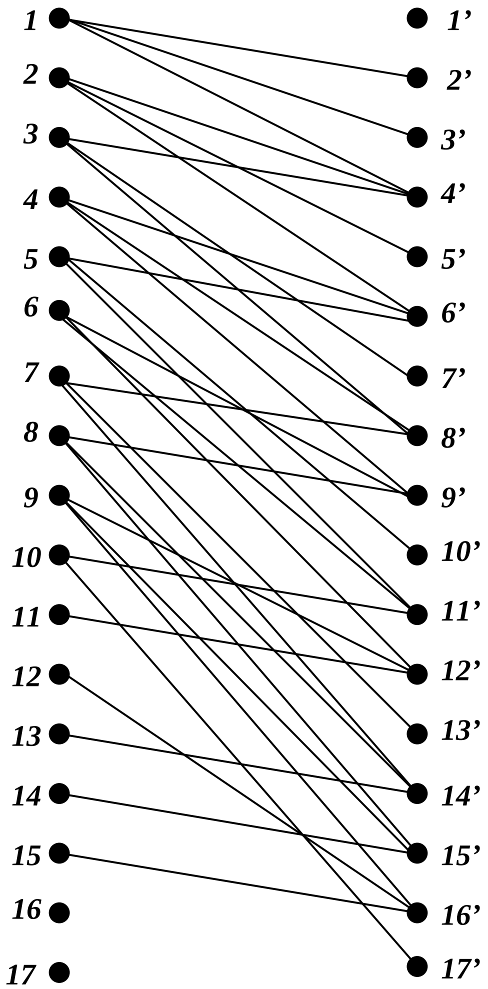
Algoritmus 2 : Acyklický graf G topologicky uspořádáme. Cesty z P tvoříme takto : opakovaně z nejlevějšího nepoužitého vrcholu postupujeme vpravo nejmenšími možnými kroky po nepoužitých vrcholech.

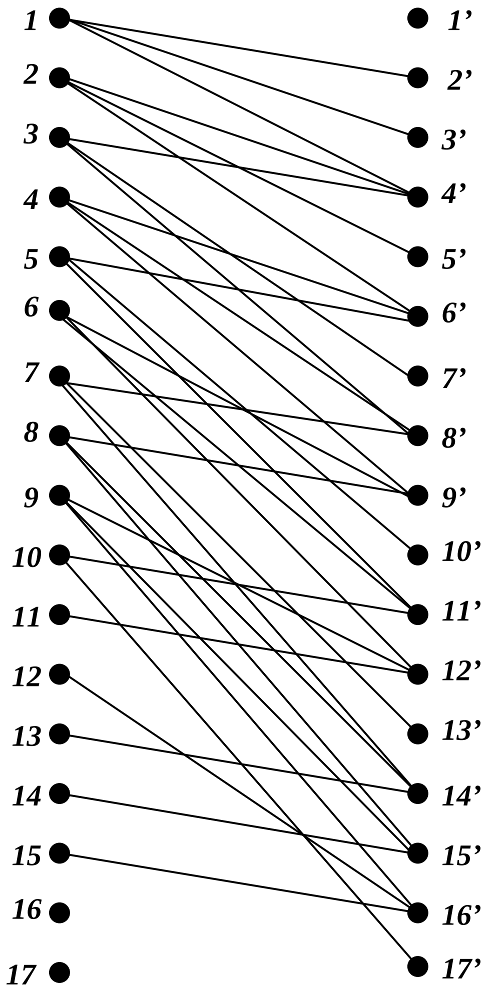
h) Odhadněte složitost Algoritmu 2.

i) Namalujte výsledek po použití Algoritmu 2 na náš G. Přitom topologické uspořádání je $1 < 2 < \dots$.

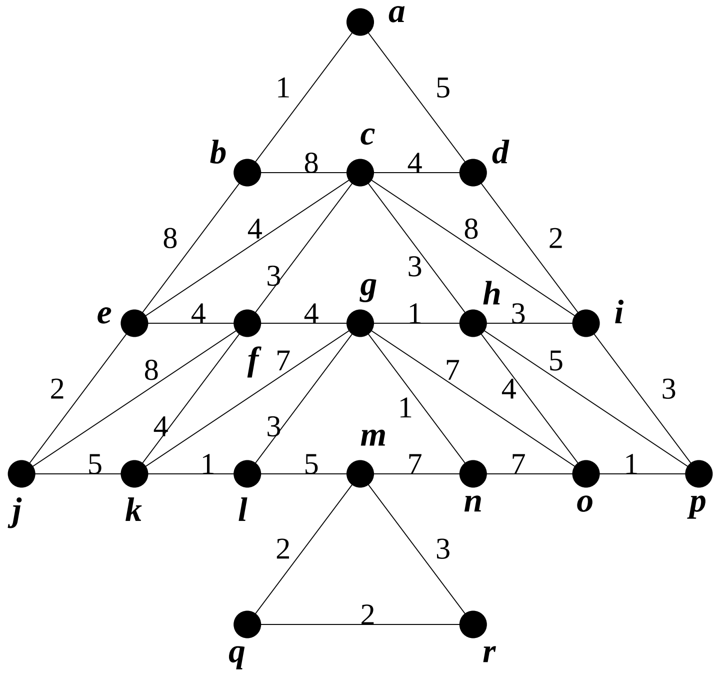


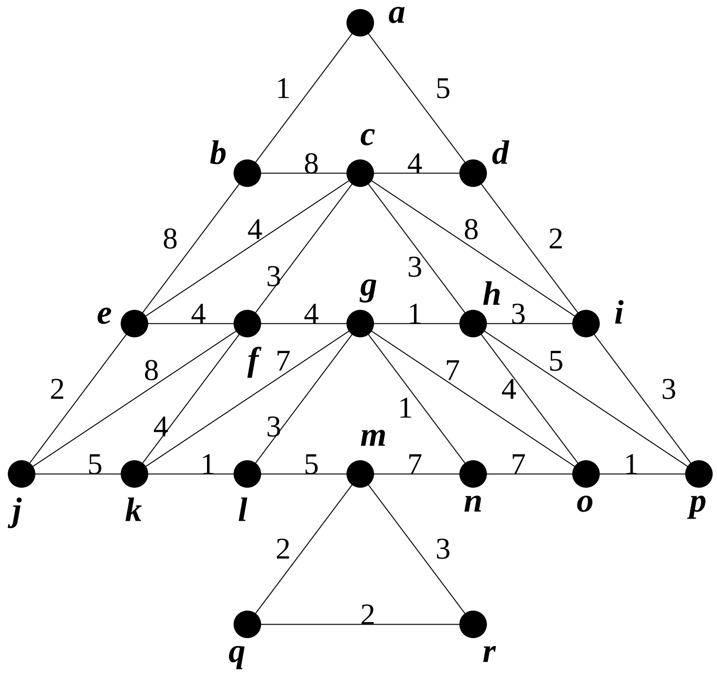






2. V ohodnoceném neorientovaném grafu $G = (V, E, w)$ zadaným obrázkem nalezněte minimální kostru Primovým algoritmem. Je-li v některém kroku více možností, řiďte se abecedou.





GRAFOVÉ ALGORITMY

2006/7 - 3. termín

1. Minimální doplnění na silně souvislý graf

Je dán orientovaný graf $G = (V, E)$. Množina hran $F \subseteq V \times V$ je jeho **doplněním**, je-li graf $(V, E \cup F)$ silně souvislý. Úkolem je najít doplnění minimální kardinality.

Pro $v \in V$ označíme $[v]$ silně souvislou komponentu obsahující vrchol v. Definujeme **faktorový** graf $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$, kde

$$V^{SCC} = \{ [v] \mid v \in V \}, \quad E^{SCC} = \{ ([u], [v]) \mid (u, v) \in E, \ [u] \neq [v] \}$$

Zvolme zobrazení α přiřazující každé komponentě reprezentanta, neboli $\alpha : V^{SCC} \to V$ splňující $[\alpha([v])] = [v]$.

a) Nechť F je minimální doplnění grafu G. Pak pro lib. $(u, v) \in F$ je $[u] \neq$ ...... a pro různá (u, v), $(u', v') \in F$ je $([u], [v]) \neq$ .... Je tedy $\{ ([u], [v]) \mid (u, v) \in F \}$ doplněním grafu G^{SCC} mohutnosti ....

b) Naopak, je-li H doplnění grafu G^{SCC} bez smyček, je

.... doplněním grafu G stejné mohutnosti.

Tedy obecný problém je převeden na problém hledání minimálního doplnění acyklického grafu. Vrchol bez výstupních hran označíme **stok**, vrchol bez vstupních hran **zdroj**. Vrchol, který je zároveň stok i zdroj nazveme **izolovaný**. Nechť v částech c) – j) je G acyklický bez izolovaných vrcholů, $|V| = n \geq 2$, $|E| = m$, s množinou zdrojů S a množinou stoků T, $|S| = s \geq 1$, $|T| = t \geq 1$.

c) Lze předpokládat, že $s \leq t$, jinak bychom graf G nahradili

....

Níže bude podán algoritmus, který najde $r \leq s$, označí prvky množiny S symboly $v_1, \ldots, v_s$ a prvky množiny T symboly $w_1, \ldots, w_t$ tak, aby platilo :

(i) pro každé $i = 1, \ldots, r$ existuje cesta z v_i do w_i,

(ii) pro každé $i = r + 1, \ldots, s$ existuje $j \in \{1, \ldots, r\}$ a cesta z v_i do w_j,

(iii) pro každé $j = r + 1, \ldots, t$ existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a cesta z v_i do w_j.

Nechť $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $T = \{b_1, \ldots, b_t\}$.

Algoritmus 1 :

1. Pro $i = 1, \ldots, s$ vedeme z a_i cestu. Vrcholy na ní označujeme symbolem i. Jsou dvě možnosti :

a) narazíme na vrchol již označený; ten nepřeznačujeme a zvyšujeme i.

b) skončíme ve vrcholu $b_j \in T$; pak prohlásíme (a_i, b_j) za nový pár a zvýšíme i.

2. Nyní si všímáme neoznačených prvků z T. Postupně z každého takového, řekněme b_k, vedeme zpětnou cestu a neoznačeným vrcholům dáváme značku 0. Jsou tři možnosti :

a) narazíme na vrchol se značkou $i \geq 1$ a a_i je v nějakém páru; bereme další neoznačený prvek z T,

b) narazíme na vrchol se značkou $i \geq 1$ a a_i není v žádném páru; pak

(otázka d)) ....

c) narazíme na vrchol se značkou 0; bereme další neoznačený prvek z T.

3. Vzniklé páry nechť jsou $(v_1, w_1), \ldots, (v_r, w_r)$, zbývající prvky z S resp. T označíme symboly $v_{r+1}, \ldots, v_s$ resp. symboly $w_{r+1}, \ldots, w_t$ libovolně.

e) Složitost algoritmu je ...., neboť každé hrany si všímáme

.... a ....

f) K čemu bylo dobré předpokládat acykličnost ? ....

Algoritmus 2 :

Klademe

$$F = \{\ (w_1, v_2), \ldots, (w_{r-1}, v_r), \underbrace{(w_r, w_{s+1}), (w_{s+1}, w_{s+2}), \ldots, (w_{t-1}, w_t), (w_t, v_1)}_{\text{jen } (w_r, v_1) \text{ pro } s=t},$$

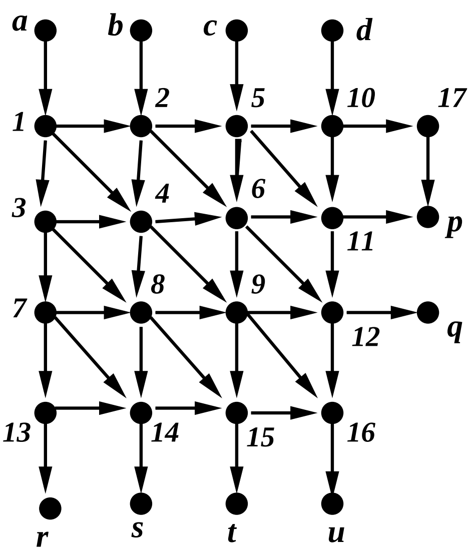
$$(w_{r+1}, v_{r+1}), \ldots, (w_s, v_s)\ \}\ .$$

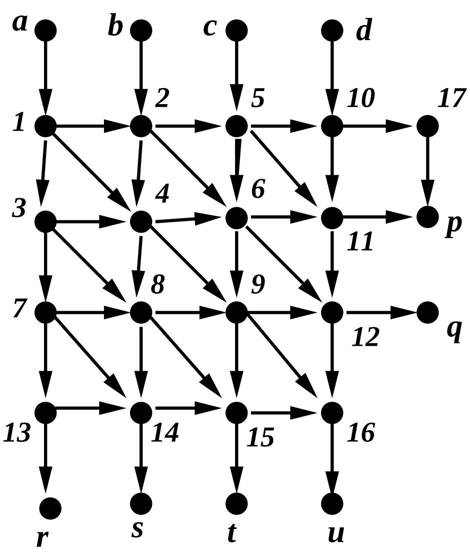
Uvažme uzavřenou cestu Q v $(V, E \cup F)$:

$$Q = (\underbrace{v_1, \ldots, w_1}_{\text{z párování}}, \underbrace{v_2, \ldots, w_2}_{\text{z párování}}, \ldots, \underbrace{v_r, \ldots, w_r}_{\text{z párování}}, \underbrace{w_{s+1}, \ldots, w_t}_{\text{nic pro } s=t}, v_1)\ .$$

g) Vše demonstrujte na následujícím grafu. Uveďte všechny páry, připište označení $v_1, \ldots, w_1, \ldots$ a přikreslete hrany z F. Kvůli jednoznačnosti dáváme přednost vrcholům, které jsou dříve v uspořádání

$$a < \cdots < d < 1 < 2 < \cdots < 17 < p < \cdots < u\ .$$





Ukážeme, že $(V, E \cup F)$ je silně souvislý :

Skutečně, lib. $u \in V$ mimo Q lze na Q napojit : v G existuje cesta z u do nějakého w_j. Je-li $j \in \{1, \ldots, r, s+1, \ldots, t\}$ jsme hotovi. V opačném případě použijeme novou hranu (w_j, v_j) a podmínku (ii).

h) Dále pro lib. takové u vede z Q do u cesta :

....

....

i) Máme $|F| =$ ....

j) Ukažte, že naše doplnění je minimální

....

....

k) Graf složený z p izolovaných vrcholů má minimální doplnění z .... hran; jak vypadá ? ....

l) Konečně, nechť acyklický graf má p izolovaných vrcholů, $s \geq 1$ zdrojů a $t \geq s$ stoků. Takový graf má minimální doplnění z .... hran; jak vypadá ? ....

2. Grafy G a H jsou zadány obrázky níže. O každém z nich rozhodněte, zda je bipartitní a své rozhodnutí dokažte. Najděte rovněž jejich maximální párování a dokažte, že Vámi nalezená párování jsou maximální.