GRAFOVÉ ALGORITMY

2008/9 - 1. termín

1. Barvení hran

Dáme kopii algoritmu s očíslovanými řádky a použitých pojmů, něco k tomu asi dodám, asi nebudu nic vynechávat.

Úkoly:

1. update mis v RECOLOR v čase O(d) :
přidáme řádky xxa,... , kde bude uvedeno
u vrcholů ... bude mis nejmenší uvedená první nepoužitá barva,
u vrcholů ... položíme ... ,
u ostatních vrcholů hodnotu mis necháme.

2. Korektnost dokážeme indukcí vzhledem k parametru ....
... = 0 : ....
indukční krok : ...

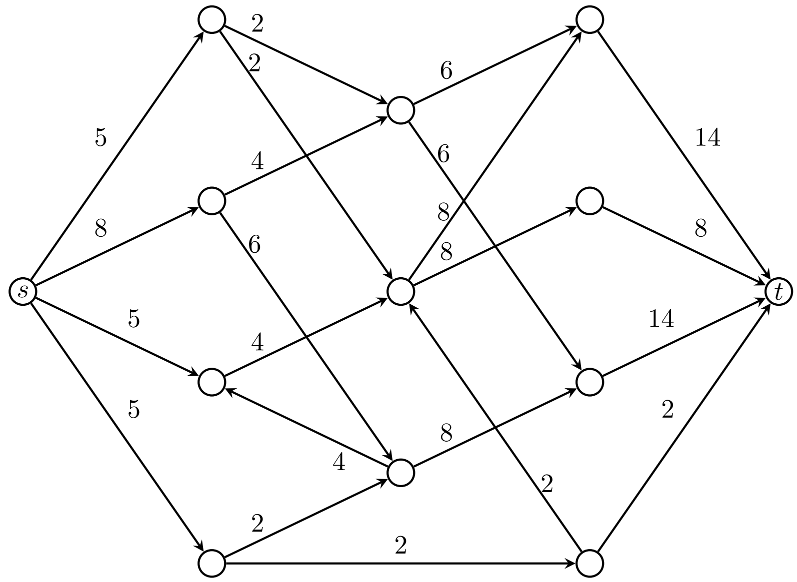
3. Jakou větu dostáváme jako důsledek korektnosti algoritmu ? Chromatické číslo grafu G je ...

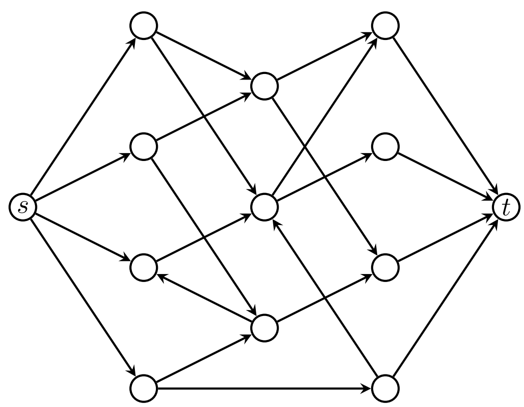
4. V jakém čase umíme implementovat RECOLOR ?
....
(Pomoc s datovými strukturami a linky mezi nimi).
Celková složitost je tedy ....

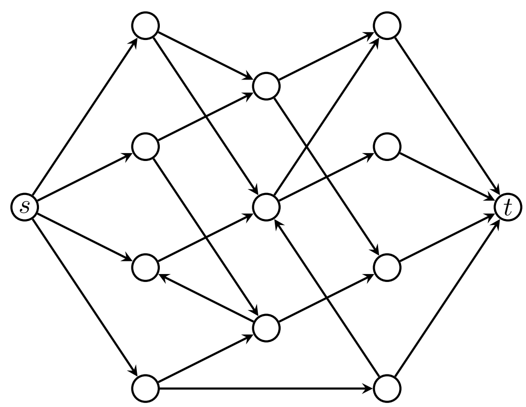
5. Aplikujte algoritmus na graf
a : b,c,d,e
b : a,c,e
c : a,b,d
d : a,c,e
e : a,b,d
Pořadí barev : červená, modrá, zelená, žlutá, hnědá
Postupujte přísně podle abecedy.
Připravím obrázky.

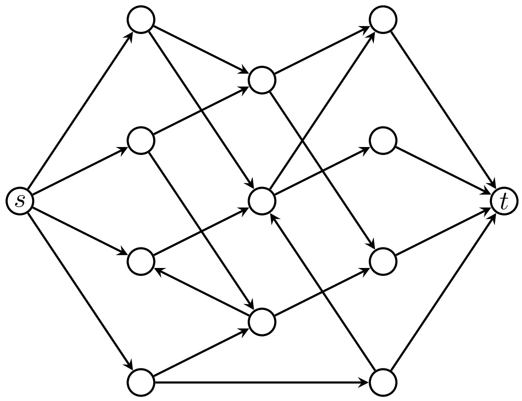
1 Toky

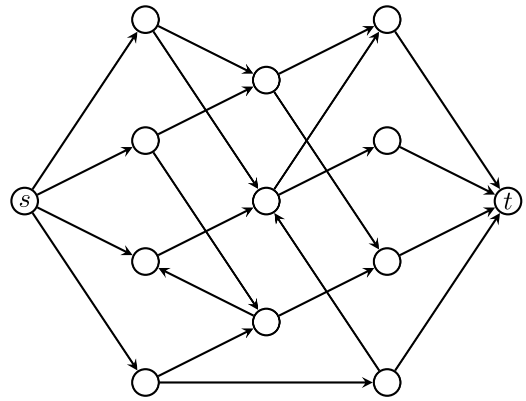
V následující síti najděte maximální tok z s do t a podejte důkaz maximality:

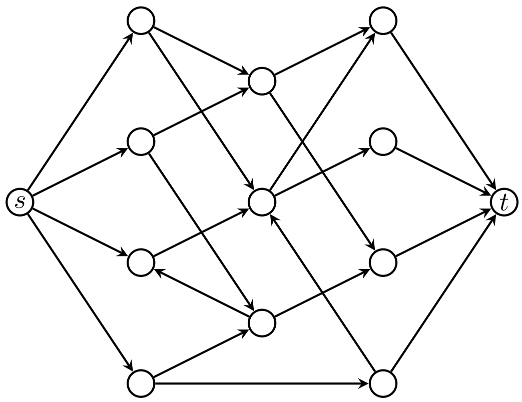


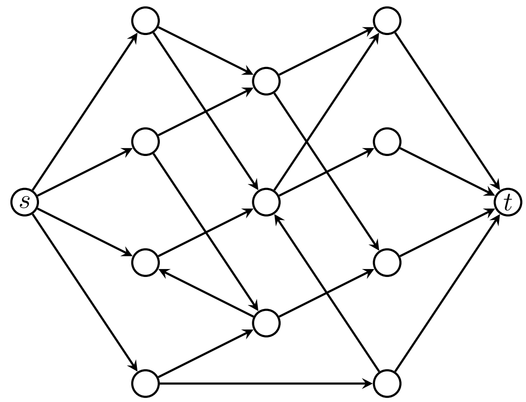


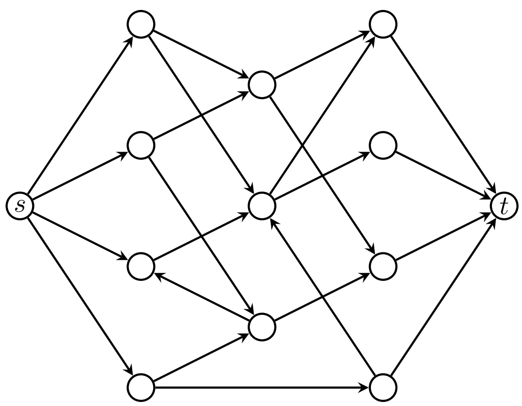


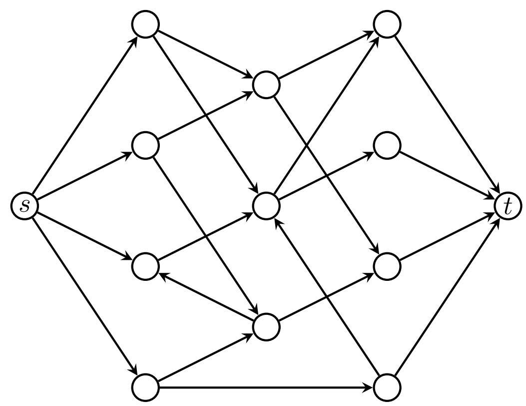

s
t


s
t


s
t


s
t


s
t


s
t

GRAFOVÉ ALGORITMY

2008/9 - 2. termín

1. Syntaktické kvaziuspořádání

Nechť $(M, \cdot)$ je monoid a nechť $P \subseteq M$ je množina. Definujme kvaziuspořádání $\leq$ na množině M vztahem

$$u \leq v \iff (\ \forall\, p, q \in M\ )\ (\ pvq \in P \ \Rightarrow\ puq \in P\ )\ .$$

Nechť C je nějaká množina generátorů monoidu $(M, \cdot)$. Uvažujme orientovaný graf $G = (V, E)$, kde

$$V = M \times M,\ E = \{\ ((uc, vc), (u, v)) \mid (u, v) \in V,\ c \in C\} \cup \{\ ((cu, cv), (u, v)) \mid (u, v) \in V,\ c \in C\}\ .$$

Uvažme, že $u \not\leq v \iff$ existuje (x, y)-$(u, v)-$cesta v G taková, že $x \notin P,\ x \in P$.
Ohodnoťme vrcholy grafu G takto

$$l(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \notin P,\ v \in P \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť M je konečná množina, $|M| = n,\ |C| = c$. Nabízí se algoritmus pro výpočet relace $\leq$.
Ze všech vrcholů

. . . .
spustíme DFS. U všech navštívených vrcholů stanovíme

. . . .
Jaká je složitost Vašeho algoritmu ?

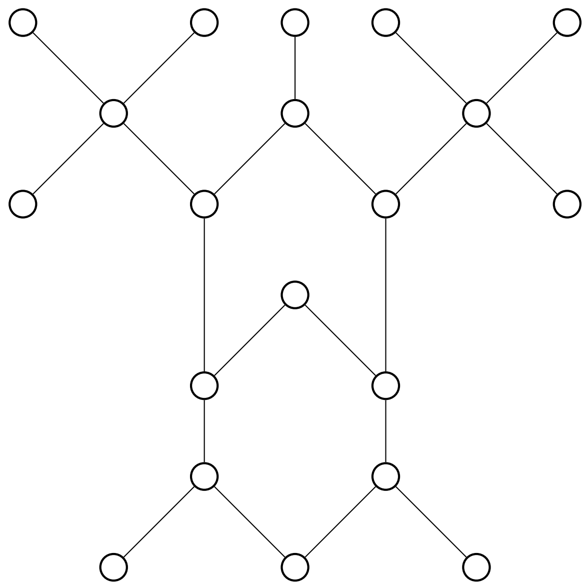
. . . .
Šlo by sekvenčně realizovat spustění DFS z několika vrcholů současně ? Jaké by se musely v DFS provést modifikace. Jak by to dopadlo se složitostí ?

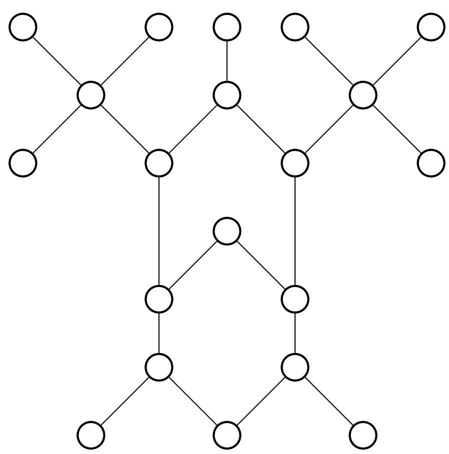
Demonstrujte algoritmus pro

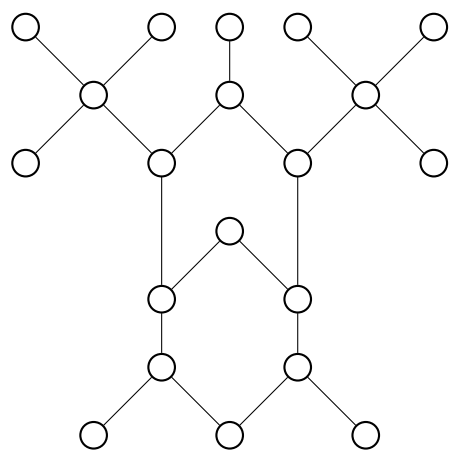
$$M = \{1, a, b\},\ 1 \text{ neutrální },a, b \text{ levé nulové },\ C = \{a, b\},\ P = \{a\}\ .$$

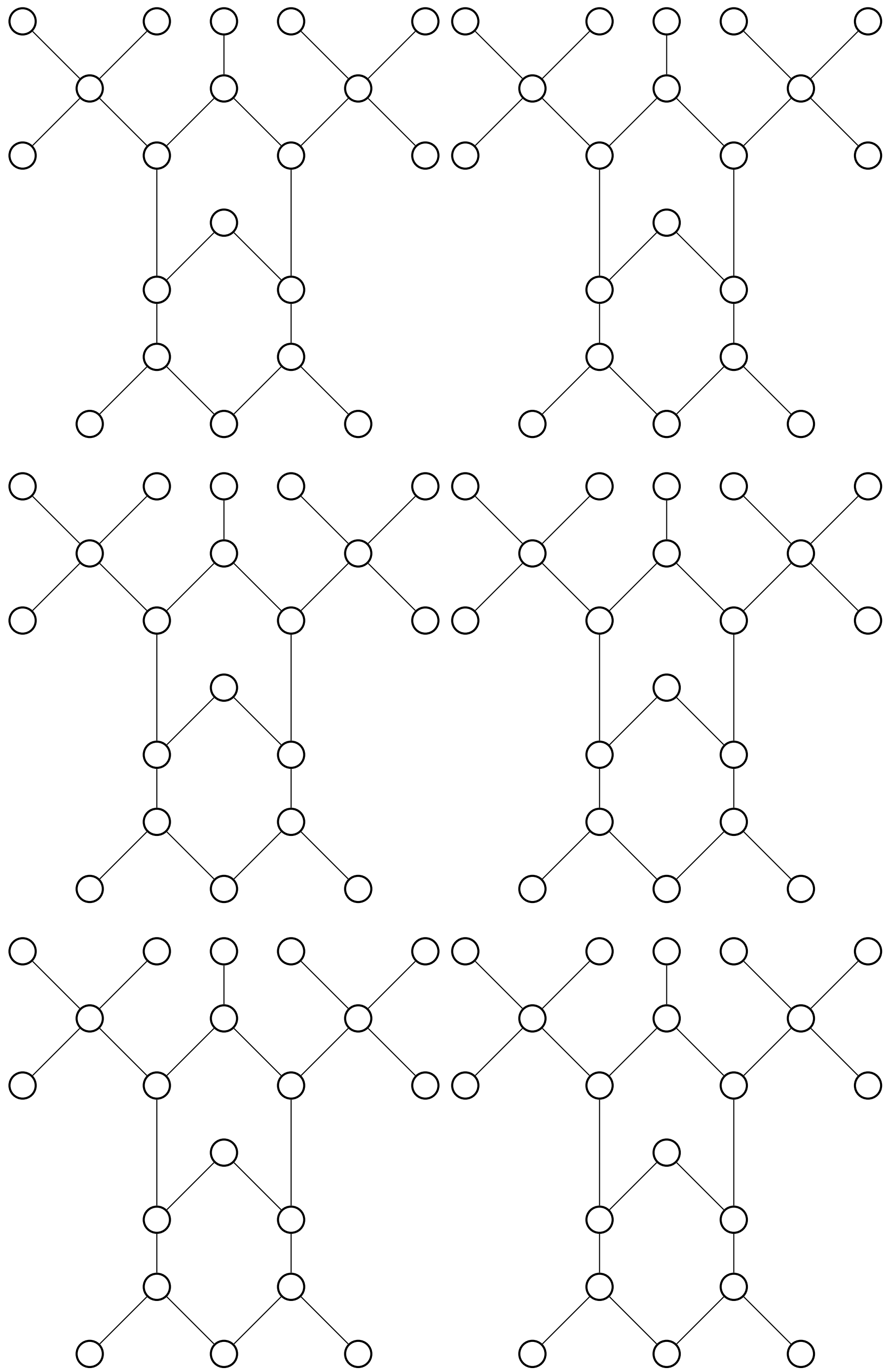
2 Párování

Doplňte do následujícího grafu 2 hrany tak, aby maximální párování pokrylo 18 vrcholů. Dokažte, že Vámi nalezené párování je ve Vámi doplněném grafu maximální. (18 bodů)
Proč přidání žádných dvou hran nestačilo, aby graf měl perfektní párování? (4 body)
Doplňte třetí hranu a najděte perfetkní párování. (8 bodů)









GRAFOVÉ ALGORITMY

2008/9 - 3. termín

1. Barvení vrcholů planárního grafu

Result 1. Pro planární graf s $n \geq 3$ je $m \leq 3n - 6$.

Result 2. Každý planární graf má vrchol stupně ≤ 5.

Result 3. Graf je planární právě když nemá podgraf izomorfní se "subdivision" of K_5 nebo $K_{3,3}$.

Doplňte konstruktivní důkaz následující věty.

Věta. Každý planární graf lze vrcholově obarvit nejvýše pěti barvami.

Dúkaz. Provedeme ho indukcí vzhleme k n.
Pokud $n \leq$ ...... je tvrzení zřejmé.

Nechť tedy $n \geq$ ..... a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy s menším počtem vrcholů.
Case 1. Nechť existuje vrchol v stupně ≤ 4. Podle indukčního předpokladu lze graf $G \setminus v$ obarvit nejvýše 5 barvami. Jak obarvíme vrchol v ?

....

....

Case 2. Nechť všechny vrcholy mají stupeň .... Podle ....

existuje vrchol stupně .... Vybereme takový vrchol v.

Podle .... existují jeho sousedi x, y, kteří ....
V $G \setminus v$ ztotožněme vrcholy x, y. Vznikne graf G', který je opět planární, neboť

....

....

....
Podle indukčního předpokladu lze G' obarvit nejvýše 5 barvami. Jak obarvíme $G \setminus v$?

....
Jak obarvíme G ?

....

Složitost. Zřejmě všechny operace kromě odstraňování vrcholů a jejich ztotožňování

vezmou celkem ....

Odstranění vrcholu v stupně $d(v)$ vezme $O(d(v))$.

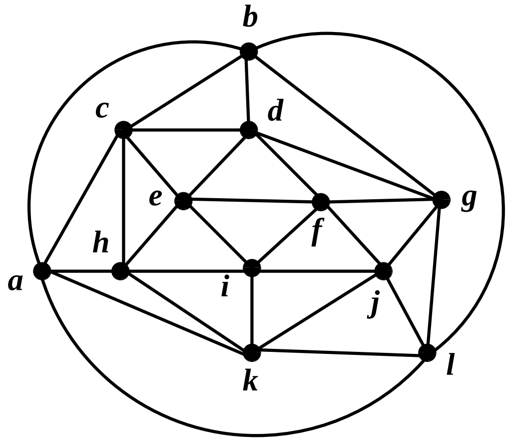
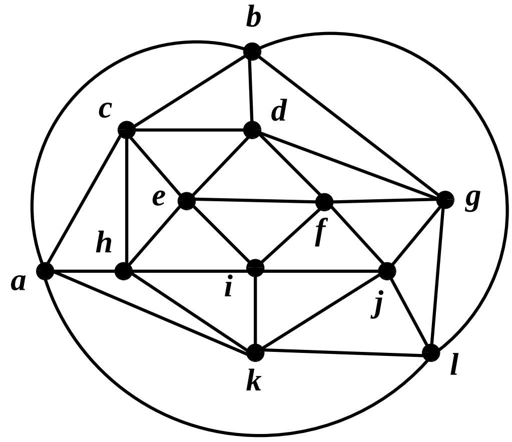
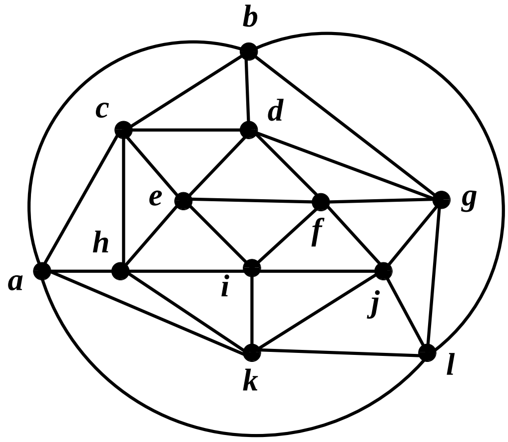
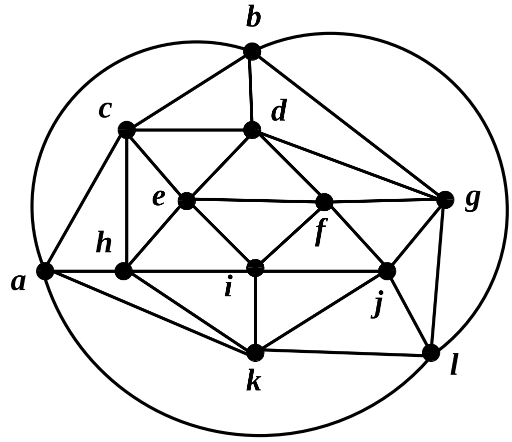
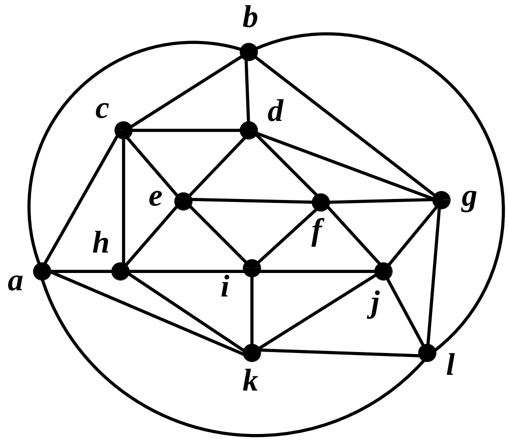
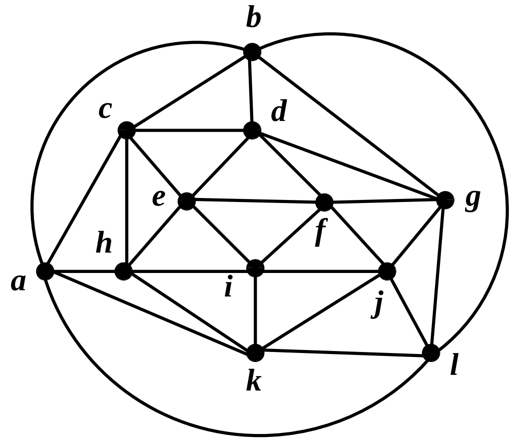
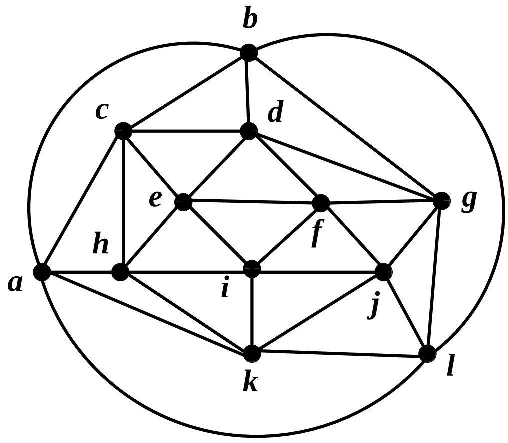
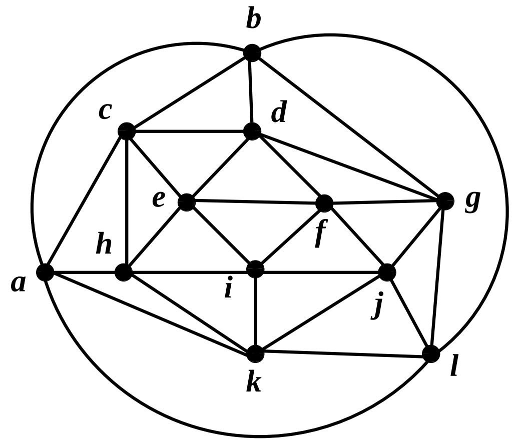
Poněvadž $\sum_{v \in V} d(v) \leq$ .... podle ....

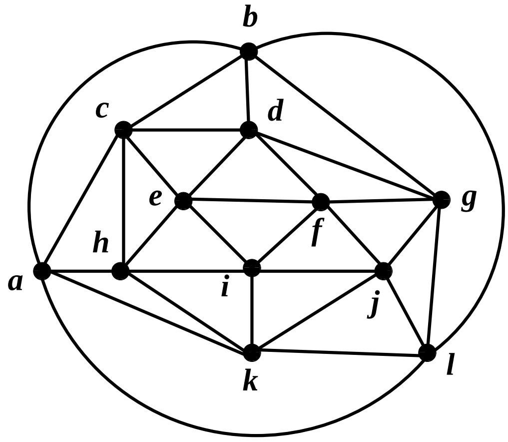
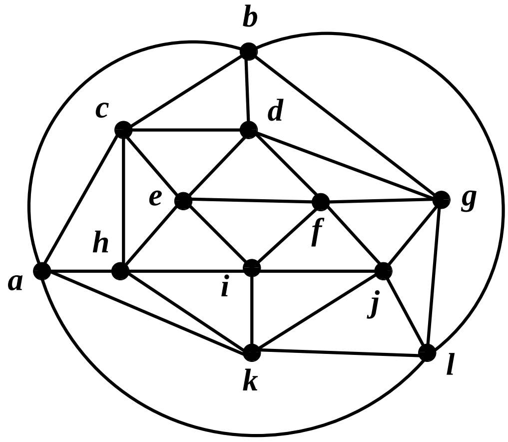
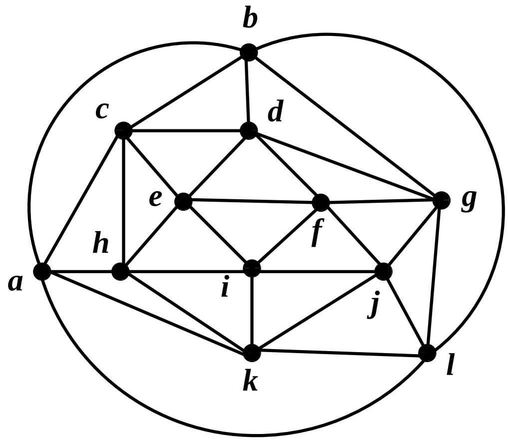
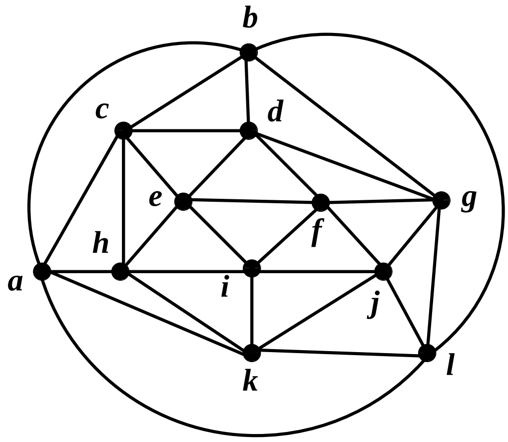
vezmou všechna odstraňování celkem ....

O složitosti tedy rozhodují ztotožnění. Vrcholy x, y ztotožníme v čase $O(d(x) + d(y))$.

Proto je celková složitost algoritmu ....

Příklad. Demonstrujte algoritmus na následujícím příkladě. Aby byl průběh výpočtu naprosto jednoznačný je
1. Pořadí barev je červená, modrá, zelená, žlutá, hnědá.
2. Pořadí vrcholů je podle abecedy, i např. vrchol $\{a, x\}$ má přednost před vrcholem b.


b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k

b
c
d
e
g
h
f
a
i
j
l
k


b
c
d
e
f
g
h
a
i
j
k
l

b
c
d
e
f
g
h
a
i
j
k
l

b
c
d
e
f
g
h
a
i
j
k
l

b
c
d
e
f
g
h
a
i
j
k
l

3 Soustava rovnic

V následující soustavě rovnic vystupuje 8 proměnných $x_1, \dots, x_8$. Vaším úkolem je soustavu vyřešit s pomocí grafových algoritmů takto:

Soustavě je přiřazen orientovaný graf G s vrcholy $v_1, \dots, v_8$ a hranami definovanými: pro všechna $i, j \in \{1, \dots, 8\}$ graf G obsahuje hranu (v_i, v_j), právě když v soustavě rovnic je řádek tvaru $x_j := Exp$, kde Exp je výraz obsahující proměnnou x_i.

Úkol číslo 1 (15 bodů): spočítejte a popište graf G^{SCC} silně souvislých komponent grafu G.

Úkol číslo 2 (10 bodů): uspořádejte silně souvislé komponenty (tedy vrcholy grafu G^{SCC}) topologicky.

Úkol číslo 3 (5 bodů): uvažujte postupně silně souvislé komponenty v topologickém uspořádání (začínáte komponentou, do níž nevedou žádné hrany). Omezte se na podsoustavu rovnic danou vrcholy zpracovávané komponenty. Podsoustavu vyřešte. Postupně takto vyřeště celou soustavu rovnic. Kolik má soustava reálných řešení? Jaká to jsou?

$$
\begin{aligned}
x_1 &:= x_1^2 + 2x_8 - 4 \\
x_2 &:= 3x_7^2 - x_4 - x_2 \\
x_3 &:= 3x_5 + 4x_4 + x_2 + 2 \\
x_4 &:= x_2^2 + 2x_7^2 - 1 \\
x_5 &:= 3x_8^2 \\
x_6 &:= x_3 - x_1 + x_4 \\
x_7 &:= x_2 + 3 \\
x_8 &:= x_5 + x_8 - 3
\end{aligned}
$$