Algebra I, 1. termín, úloha 1, 13.1. 2006

Jméno : **UČO :**

Nechť $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ je grupa a H její podgrupa.

a) Klademe

$aH =$ ...., $G/H =$ ....

Pozor : pokud nezvládnete tuto část, zbytek "řešení" této úlohy se při opravě ignoruje.

b) Pro $(G, \cdot) = (S_3, \circ)$, $H = \{id, (1,2)\}$ doplňte

$G/H =$ ....

c) Pro $a, b \in G$ je ekvivalentní : $aH = bH$ a $b^{-1}a \in$ ....

Důkaz. $\Rightarrow$:...

$\Leftarrow$: ....

....

....

....

d) G/H je rozklad na množině G :

(i) lib. třída je neprázdná, neboť ....

(ii) ...., neboť ....

(iii) ...., neboť ....

....

e) Podgrupa H je normální v $\mathcal{G}$, je-li ....

f) Nechť H je normální podgrupou grupy $\mathcal{G}$. Na množině G/H definujeme operaci $\cdot$ vztahem

.... $(*)$

g) Korektnost definice : Máme ukázat, že

.... implikuje ....

h) Důkaz korektnosti :
....

....

i) Ukažte, že pro $(G, \cdot) = (S_3, \circ)$, $H = \{id, (1,2)\}$ předpis $(*)$ není korektní.

....

....

Body : 3,3,7,7,2,2,4,7,5

Algebra I, 1. termín, úloha 2, 13.1. 2006

Jméno : **UČO :**

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R, S, T\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

$a : L \mapsto P, \quad P \mapsto S, \quad R, S, T \mapsto T, \quad Q \mapsto R,$

$b : L, Q, S, T \mapsto T, \quad P, R \mapsto Q.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q \ \&\ qv = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 1. termín, úloha 3, 13.1. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Nechť $(\mathbb{S}_4, \circ)$ je grupa všech permutací množiny $\{1,2,3,4\}$. Je množina

$$H = \{ \ \alpha \circ \beta \mid \alpha, \beta \text{ transpozice z } \mathbb{S}_4 \ \}$$

její podgrupou ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = e^{-x} \ .$$

Je to homomorfismus pologrupy $(\mathbb{R}, \cdot)$ do pologrupy $(\mathbb{R}, +)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je multiplikativní pologrupa okruhu $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)/(x^2 + x + 1)$ izomorfní s pologrupou $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 2. termín, úloha 1, 27.1. 2006

Jméno : **UČO :**

---

a) Existuje prostý homomorfismus ohruhu $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ do nějakého tělesa ? .... Zdůvodnění :

Nechť v b) – g) je $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ obor integrity.

b) Při konstrukci podílového tělesa okruhu $\mathcal{R}$ jsme definovali na množině ....

relaci $\sim$ vztahem ....

c) Relace $\sim$ je

....

d) Dokažte transitivitu relace $\sim$. Špatný důkaz je hodnocen -10 body.

....

e) Dále jsme na množině .... definovali operace $+$ a $\cdot$ vztahy

....

f) Dokažte korektnost definice operace $+$:

....

g) Vztah mezi okruhem $\mathcal{R}$ a jeho podílovým tělesem $(Q(R), +, \cdot)$:

Zobrazení $\iota : R \to Q(R)$ definované předpisem $a \mapsto$........... je ....

h) Co se stane, aplikujeme-li výše uvedenou konstrukci na těleso ?

....

i) Co se stane, aplikujeme-li výše uvedenou konstrukci na $(\mathbb{Z}_4, +, .)$?

....

Body : 4,3,3,8,3,8,4,3,4. Případné záporné body se počítají jen v rámci této úlohy; minimální počet bodů je tedy 0.

Algebra I, 2. termín, úloha 2, 27.1. 2006

Jméno : **UČO :**

V monoidu $T(X)$ všech transformací množiny $X = \{K, L, M, N, O\}$ s operací skládání generujte podmonoid $S \subseteq T(X)$ množinou $\{f, g\}$, kde

$f : K \mapsto L, \quad L, M \mapsto N, \quad N, O \mapsto O,$

$g : K, N \mapsto M, \quad L \mapsto K, \quad M, O \mapsto O.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu S.

V monoidu S popište relaci $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in S$:

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in S\ )\ (\ up = q \ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 2. termín, úloha 3, 27.1. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Nechť $A = \{a, b, c\}$, $R = 2^{A \times A}$ a pro $\rho, \tau \in R$ klademe

$$\rho \star \tau = \{ \ (x, z) \mid \text{ existuje } y \in A \text{ tak, že } (x, y) \in \rho, (y, z) \in \tau \ \} \ .$$

Je množina

$$S = \{ \ \rho \subseteq A \times A \mid \text{ existují } x, y, z \in A \text{ tak, že } x \neq y, \ (x, z), (y, z) \in \rho \ \}$$

podpologrupou pologrupy $(R, \star)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Je zobrazení $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mapsto p + s$ homomorfismem okruhu

$$(\ \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \ \}, +, \cdot \ )$$

do okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je pologrupa $(S_n, \circ)/A_n$, $n \in \mathbb{N}$, izomorfní s pologrupou $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto pologrupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 3. termín, úloha 1, 3. 2. 2006

Jméno : **UČO :**

Nechť $T(A)$ značí množinu všech transformací množiny A a nechť $S(A)$ značí množinu všech permutací množiny A (= bijekcí A na A). Nechť $\circ$ je operace skládání zobrazení. Píšeme S_n místo $S(\{1,\dots,n\})$.

a) Pro která $m, n \in \mathbb{N}$ je $(S_m, \circ, id)$ izomorfní s podgrupou monoidu $(T_n, \circ, id)$? Právě pro ....

Skutečně, ...

....

b) Cayleyho věta pro monoidy :
Libovolný monoid $(M, \cdot, e)$ je izomorfní .... monoidu.......................... .

Důkaz : Skutečně, definujeme

$\rho : M \to$ .... , $a \mapsto \rho_a$, kde

$\rho_a : x \mapsto$ ....

Pak $\rho_a \in$ .... ,

....

....

c) Cayleyho věta pro grupy :
Libovolná grupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Využijeme-li c), zbývá dokázat, že ....
A to platí, neboť ....

....

d) Cayleyho věta pro pologrupy :
Libovolná pologrupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Skutečně, ...

....

e) Pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ izomorfní podgrupě grupy $(S_n, \circ)$? Právě pro

....

Důkaz : 1. Pro .... $[1]_{24} \mapsto$ .... definuje .... homomorfismus.
Skutečně, ...

....

....

2. Pro .... není v $(S_n, \circ)$ prvek řádu ....
Skutečně, ...

....

....

Body : 6,8,8,8,10

Algebra I, 3. termín, úloha 2, 3. 2. 2006

Jméno : **UČO :**

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, O\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

$a : L \mapsto P, \quad P, Q \mapsto L, \quad O \mapsto O,$

$b : L, P \mapsto Q, \quad Q, O \mapsto O.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{D}$, která je nejmenší evivalencí na množině M obsahující relace R i $\mathcal{L}$. Přitom pro $p, q \in M$:

$$p \, \mathcal{R} \, q \iff (\ \exists \, u, v \in M \ ) \ (\ pu = q \ \& \ qv = p \ ) \ ,$$

$$p \, \mathcal{L} \, q \iff (\ \exists \, u, v \in M \ ) \ (\ up = q \ \& \ vq = p \ ) \ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 3. termín, úloha 3, 3. 2. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Nechť $A = \{a, b, c\},\ R = 2^{A\times A}$ a pro $\rho, \tau \in R$ klademe

$$\rho \star \tau = \{\ (x,z) \mid \text{ existuje } y \in A \text{ tak, že } (x,y) \in \rho, (y,z) \in \tau\ \}\ .$$

Je množina

$$S = \{\ \rho \subseteq A \times A \mid \text{ pro každé } x \in A \text{ existuje } y \in A \text{ tak, že } (\ (x,y) \in \rho \text{ nebo } (y,x) \in \rho\ )\ \}$$

podpologrupou pologrupy $(R, \star)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Je zobrazení $\alpha : \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \mapsto p$ homomorfismem okruhu

$$(\ \{\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\ \}, +, \cdot\ )$$

do okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Jsou grupy $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Q}, +)$ izomorfní ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.