Algebra I, 1. termín, úloha 1, 18. 1. 2007

Jméno :

Pokud používáte zlomky, musíte je definovat !!

a) Existuje prostý homomorfismus ohruhu $(\mathbb{Z}_2, +, .) \times (\mathbb{Z}_3, +, .)$ do nějakého tělesa ? .... Zdůvodnění :

Nechť v b) – g) je $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ obor integrity.

b) Při konstrukci podílového tělesa okruhu $\mathcal{R}$ jsme definovali na množině ....

relaci $\sim$ vztahem ....

c) Relace $\sim$ je

....

d) Dokažte transitivitu relace $\sim$. Špatný důkaz je hodnocen -10 body.

....

e) Dále jsme na množině $Q(R) =$ .... definovali operace $+$ a $\cdot$ vztahy

....

f) Dokažte korektnost definice operace $+$:

....

g) Vztah mezi okruhem $\mathcal{R}$ a jeho podílovým tělesem $(Q(R), +, \cdot)$:

Zobrazení $\iota : R \to Q(R)$ definované předpisem $a \mapsto$............ je ....

h) Pro okruh $(R, +, \cdot)$ definujeme okruh $(R[i], +, \cdot)$ vztahy

$$R[i] = R \times R,\ (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),\ (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)\ .$$

Prvky můžete psát ve tvaru $a+bi$. Jak vypadají prvky $Q(\mathbb{Z}[i])$? ....

i) Platí, že okruhy $((Q(\mathbb{Z})[i], +, \cdot))$ a $(Q(\mathbb{Z}[i]), +, \cdot)$ jsou izomorfní. Izomorfismem je zobrazení

$f :$ .... $\mapsto$ ....

Dokažte, že váš předpis skutečně korektně definuje zobrazení.

Body : 3,3,3,7,3,7,4,3,7. Případné záporné body se počítají jen v rámci této úlohy; minimální počet bodů je tedy 0.

Algebra I, 1. termín, úloha 2, 18. 1. 2007

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R, S, T\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde
$a : L \mapsto P,\ P, Q, R, T \mapsto Q,\ S \mapsto T,$
$b : L \mapsto R,\ P, S, T \mapsto S,\ Q, R \mapsto Q.$
Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.
V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q\ \&\ qv = p\ )\ ,$$

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q\ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 1. termín, úloha 3, 18. 1. 2007

Jméno :

---

a) Nechť $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Rozhodněte, zda množina $\{\, a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ je podmonoidem monoidu $(\mathbb{R}, \cdot)$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť

$$\alpha : \mathbb{R}[x] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z},\ \ \alpha(f) = \text{stupeň } f\ .$$

Je to homomorfismus pologrupy $(\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}, \cdot)$ do pologrupy $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je multiplikativní pologrupa okruhu $(\mathbb{Z}_2[x]/(x^2), +, \cdot)$ izomorfní s pologrupou $(\mathbb{Z}_4, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto pologrupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 2. termín, úloha 1, 25. 1. 2007

Jméno :

Nechť $T(A)$ značí množinu všech transformací množiny A a nechť $S(A)$ značí množinu všech permutací množiny A (= bijekcí A na A). Nechť $\circ$ je operace skládání zobrazení. Pro $A = \{1, \dots, n\}$ píšeme stručně T_n a S_n.

a) Pro která $m, n \in \mathbb{N}$ je $(T_m, \circ)$ izomorfní s podpologrupou grupy $(S_n, \circ)$? Právě pro ....

Skutečně, ...

....

b) Cayleyho věta pro monoidy :
Libovolný monoid $(M, \cdot, e)$ je izomorfní .... monoidu.......................... .

Důkaz : Skutečně, definujeme

$\rho : M \to$ .... , $a \mapsto \rho_a$, kde

$\rho_a : x \mapsto$ ....

Pak $\rho_a \in$ .... ,

....

....

c) Cayleyho věta pro grupy :
Libovolná grupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Využijeme-li c), zbývá dokázat, že ....
A to platí, neboť ....

....

d) Cayleyho věta pro pologrupy :
Libovolná pologrupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Skutečně, ...

....

e) Pro která $n \in \mathbb{N}$ v $(S_10, \circ)$ existuje podgrupa izomorfní se $(\mathbb{Z}_n, +)$? Právě pro

....

Skutečně, ...

....

....

Body : 6,9,9,8,8

Algebra I, 2. termín, úloha 2, 25. 1. 2007

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R, S\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

$a : L, P, Q \mapsto P,\ R, S \mapsto S,$

$b : L, Q \mapsto R,\ P \mapsto Q,\ R, S \mapsto S.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q \;\&\; qv = p\ )\ ,$$

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q \;\&\; vq = p\ )\ .$$

Popište též relaci $\mathcal{D}$, která je nejmenší ekvivalencí obsahující relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$.

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 2. termín, úloha 3, 25. 1. 2007

Jméno :

---

a) Tvoří množina $\{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť

$$\alpha : \mathbb{Z}_4[x] \to \{-\infty, 0, 1, \dots\}, \ \alpha(f) = \text{stupeň } f \ .$$

Je to homomorfismus pologrupy $(\mathbb{Z}_4[x], \cdot)$ do pologrupy $(\{-\infty, 0, 1, \dots\}, +)$? Přitom $\infty + a = a + \infty$ pro vš. a.
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je grupa $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ izomorfní s grupou $(\mathbb{C}, +)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 3. termín, úloha 1, 31. 1. 2007

Jméno :

---

a) Definujte polynom nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Je to posloupnost ...

b) Definujte součin dvou polynomů.

c) Jaké vlastnosti má struktura $(R[x], +)$?

d) Proč můžeme psát polynomy ve tvaru $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$?

e) Definujte násobnost kořene.

f) Definujte derivaci polynomu.

g) Nechť $c \in R$ je k-násobný kořen polynomu $f \in R[x]$. Pak c je alespoň

....

h) Dokažte tvrzení z g) (na druhou stranu tohoto papíru). Potřebujete-li pomocný vztah pro derivování součinu, uveďte ho (bez důkazu).

i) Nechť $(R, +, \cdot)$ je těleso ....
Nechť $c \in R$ je k-násobný kořen polynomu $f \in R[x]$. Pak c je

....

j) Nechť $f \in \mathbb{C}[x]$ je šestého stupně s trojnásobným kořenem a, dvojnásobným kořenem b a jednoduchým kořenem c. Co můžeme říci o kořenech polynomu f' ?

Body : 3,3,4,4,3,3,3,10,3,4.

Algebra I, 3. termín, úloha 2, 31. 1. 2007

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

$a : L \mapsto P,\ P \mapsto Q,\ Q, R \mapsto R,$

$b : L, R \mapsto R,\ P, Q \mapsto P.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p\, \mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q\ \&\ qv = p\ )\ ,$$

$$p\, \mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q\ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 3. termín, úloha 3, 31. 1. 2007

Jméno :

---

a) Tvoří množina $\{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť

$$\alpha : \mathbb{Z}[x] \to \{-\infty, 0, 1, \dots\},\ \alpha(f) = \text{stupeň } f\ .$$

Je to homomorfismus pologrupy $(\mathbb{Z}[x], +)$ do pologrupy $(\{-\infty, 0, 1, \dots\}, +)$? Přitom $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$ pro vš. a.
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je monoid $(\mathbb{R}, \cdot) \times (\mathbb{R}, \cdot)$ izomorfní s monoidem $(\mathbb{C}, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto monoidy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.