Algebra I, 1. termín, úloha 1, 15. 1. 2009

Jméno :

Nechť $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ je grupa a H její podgrupa.

a) Klademe

$aH =$ ...., $G/H =$ ....

Pozor : pokud nezvládnete část a), zbytek "řešení" této úlohy se při opravě ignoruje.

b) Pro $(G, \cdot) = (S_3, \circ)$, $H = \{id, (1,3)\}$ doplňte

$G/H =$ ....

c) Pro $a, b \in G$ je ekvivalentní : $aH = bH$ a $b^{-1}a \in$ ....

Důkaz. $\Rightarrow$:...

$\Leftarrow$: ....

....

....

....

d) G/H je rozklad na množině G :

(i) lib. třída je neprázdná, neboť ....

(ii) ...., neboť ....

(iii) ...., neboť ....

....

e) Podgrupa H je normální v $\mathcal{G}$, je-li ....

f) Nechť H je normální podgrupou grupy $\mathcal{G}$. Na množině G/H definujeme operaci $\cdot$ vztahem

.... $(*)$

g) Korektnost definice : Máme ukázat, že

.... implikuje ....

h) Důkaz korektnosti :
....

....

i) Ukažte, že pro $(G, \cdot) = (S_3, \circ)$, $H = \{id, (1,3)\}$ předpis $(*)$ není korektní.

....

....
Body : 3,3,7,7,2,2,4,7,5

Algebra I, 1. termín, úloha 2, 15. 1. 2009

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, M, N, O\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b, c\}$, kde

$a : L, M \mapsto M,\ N \mapsto N,\ O \mapsto O,$

$b : L, M \mapsto L,\ N, O \mapsto O,$

$c : L, O \mapsto O,\ M, N \mapsto N.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p\, \mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q\ \&\ qv = p\ )\ ,$$

$$p\, \mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q\ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 1. termín, úloha 3, 15. 1. 2009

Jméno :

---

a) Nechť A je množina. Tvoří $\{f : A \to A \mid |f(A)| \geq 2\}$ podmonoid monoidu $(T(A), \circ)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Množina $G = \left\{ \begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid p, a \in \mathbb{Q},\ p \neq 0 \right\}$ spolu s operací násobení matic tvoří grupu $(G, \cdot)$.

Je zobrazení $\alpha : \begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto p$ homomorfismem této grupy do grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je okruh $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)/(x^2 + x + 1)$ izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)/(x^2 + 1)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto monoidy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 2. termín, úloha 1, 28. 1. 2009

Jméno :

Nechť $T(A)$ značí množinu všech transformací množiny A a nechť $S(A)$ značí množinu všech permutací množiny A (= bijekcí A na A). Nechť $\circ$ je operace skládání zobrazení. Pro $A = \{1, \ldots, n\}$ píšeme stručně T_n a S_n.

a) Pro která $m, n \in \mathbb{N}$ je $(T_m, \circ)$ izomorfní s podpologrupou grupy $(S_n, \circ)$? Právě pro ....

Skutečně, ...

....

b) Cayleyho věta pro monoidy :
Libovolný monoid $(M, \cdot, e)$ je izomorfní .... monoidu.......................... .

Důkaz : Skutečně, definujeme

$\rho : M \to$ .... , $a \mapsto \rho_a$, kde

$\rho_a : x \mapsto$ ....

Pak $\rho_a \in$ .... ,

....

....

c) Cayleyho věta pro grupy :
Libovolná grupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Využijeme-li c), zbývá dokázat, že ....
A to platí, neboť ....

....

d) Cayleyho věta pro pologrupy :
Libovolná pologrupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Skutečně, ...

....

e) Pro která $n \in \mathbb{N}$ v $(S_{10}, \circ)$ existuje podgrupa izomorfní se $(\mathbb{Z}_n, +)$? Právě pro
....

Skutečně, ...

....

....

Body : 6,9,9,8,8

Algebra I, 2. termín, úloha 2, 28. 1. 2009

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R, S, T\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

$a : L \mapsto P, \quad P \mapsto S, \quad R, S, T \mapsto T, \quad Q \mapsto R,$

$b : L, Q, S, T \mapsto T, \quad P, R \mapsto Q.$

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.

V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q \ \&\ qv = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 2. termín, úloha 3, 28. 1. 2008

Jméno :

---

a) Nechť A je množina. Tvoří $\{ f : A \to A \mid |f(A)| < |A| \}$ podmonoid monoidu $(T(A), \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Množina $G = \left\{ \begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid p, a \in \mathbb{Q},\ p \neq 0 \right\}$ spolu s operací násobení matic tvoří monoid $(G, \cdot)$.

Je zobrazení $\alpha : \begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$ homomorfismem tohoto monoidu do monoidu $(\mathbb{R}, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je okruh $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)/(x^2+1)$ izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)/(x^2+x)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto monoidy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 3. termín, úloha 1, 11. 2. 2009

Jméno :

---

a) Definujte polynom nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Je to posloupnost ...

b) Definujte součin dvou polynomů.

c) Jaké vlastnosti má struktura $(R[x], +)$?

d) Proč můžeme psát polynomy ve tvaru $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$?

e) Definujte násobnost kořene.

f) Definujte derivaci polynomu.

g) Nechť $c \in R$ je k-násobný kořen polynomu $f \in R[x]$. Pak c je alespoň

....

h) Dokažte tvrzení z g) (na druhou stranu tohoto papíru). Potřebujete-li pomocný vztah pro derivování součinu, uveďte ho (bez důkazu).

i) Nechť $(R, +, \cdot)$ je těleso ....
Nechť $c \in R$ je k-násobný kořen polynomu $f \in R[x]$. Pak c je

....

j) Nechť $f \in \mathbb{C}[x]$ je šestého stupně s trojnásobným kořenem a, dvojnásobným kořenem b a jednoduchým kořenem c. Co můžeme říci o kořenech polynomu f' ?

Body : 3,3,4,4,3,3,3,10,3,4.

Algebra I, 3. termín, úloha 2, 11. 2. 2009

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{L, P, Q, R, S, T\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde
$a : L \mapsto P,\ P, Q, R, T \mapsto Q,\ S \mapsto T,$
$b : L \mapsto R,\ P, S, T \mapsto S,\ Q, R \mapsto Q.$
Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M.
V monoidu M popište relaci $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q\ \&\ qv = p\ )\ ,$$

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q\ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 3. termín, úloha 3, 11. 2. 2009

Jméno :

---

a) Nechť $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Rozhodněte, zda množina $\{\, a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\,\}$ je podmonoidem monoidu $(\mathbb{R}, \cdot)$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť

$$\alpha : \mathbb{R}[x] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z},\ \ \alpha(f) = \text{stupeň } f\ .$$

Je to homomorfismus pologrupy $(\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}, \cdot)$ do pologrupy $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je multiplikativní pologrupa okruhu $(\mathbb{Z}_2[x]/(x^2), +, \cdot)$ izomorfní s pologrupou $(\mathbb{Z}_4, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto pologrupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.