Algebra I, 1. termín, skupina A, úloha 1, 19. 1. 2010

Jméno :

---

a) *Polynomem* nad tělesem $(R, +, \cdot)$ rozumíme posloupnost $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, kde

....

b) Na množině $R[x]$ všech polynomů nad $(R, +, \cdot)$ klademe

$(f_0, f_1, f_2, \dots) + (g_0, g_1, g_2, \dots) =$ .... a

$(f_0, f_1, f_2, \dots) \cdot (g_0, g_1, g_2, \dots) =$ ....

....

c) Položíme-li $x =$ ...., můžeme psát

$f =$ ....

d) Takto dostáváme komutativní okruh $(R[x], +, \cdot)$. V něm je ideál generovaný polynomem f roven

$$(f) = \text{...}$$

e) Klademe

$R[x]/(f) =$ ...., kde...

f) Na této množině definujeme sčítámí a násobení vztahy

....

....

g) Ukažte, že vaše definice sčítání je korektní:

....

....

....

h) Pro nekonstantní polynom f je zobrazení ....

....

"přirozenou" bijekcí množiny $R[x]/(f)$ na množinu $R^{\cdots}$.
i) Aby se jednalo o izomorfismus $(R[x]/(f), +, \cdot)$ na $(R^{\cdots}, +, \cdot)$, položíme

$(a_0, \dots, a_{\dots}) + (b_0, \dots, b_{\dots}) =$ .... a

$(a_0, \dots, a_{\dots}) \cdot (b_0, \dots, b_{\dots}) =$ ....

....

j) Konečně, prvek .... má v $(R[x]/(f), +, \cdot)$ inverzi právě když

....
Dokažte ("z vody") některou z implikací; uveďte, kterou dokazujete.

Algebra I, 1. termín, skupina B, úloha 1, 19. 1. 2010

Jméno :

---

a) *Polynomem* nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme posloupnost $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$, kde

....

b) Na množině $T[x]$ všech polynomů nad $(T, +, \cdot)$ klademe

$(p_0, p_1, p_2, \dots) + (q_0, q_1, q_2, \dots) =$ .... a

$(p_0, p_1, p_2, \dots) \cdot (q_0, q_1, q_2, \dots) =$ ....

....

c) Položíme-li $x =$ ...., můžeme psát

$p =$ ....

d) Takto dostáváme komutativní okruh $(T[x], +, \cdot)$. V něm je ideál generovaný polynomem p roven

$$(p) = \text{..}$$

e) Klademe

$T[x]/(p) =$ ...., kde..

f) Na této množině definujeme sčítámí a násobení vztahy

....

....

g) Ukažte, že vaše definice sčítání je korektní:

....

....

....

h) Pro nekonstantní polynom p je zobrazení ....

.... "přirozenou" bijekcí množiny $T[x]/(p)$ na množinu $T^{\cdots}$.

i) Aby se jednalo o izomorfismus $(T[x]/(p), +, \cdot)$ na $(T^{\cdots}, +, \cdot)$, položíme

$(f_0, \dots, f_{\dots}) + (g_0, \dots, g_{\dots}) =$ .... a

$(f_0, \dots, f_{\dots}) \cdot (g_0, \dots, g_{\dots}) =$ ....

....

j) Konečně, prvek .... má v $(T[x]/(p), +, \cdot)$ inverzi právě když

....

Dokažte ("z vody") některou z implikací; uveďte, kterou dokazujete.

Algebra I, 1. termín, skupina A, úloha 2, 19. 1. 2010

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

	1	2	3	4
a	2	4	4	4
b	3	1	3	4

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

Je třeba též uvést přepisující pravidla.

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 1. termín, skupina B, úloha 2, 19. 1. 2010

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

	1	2	3	4	5
a	2	2	4	2	4
b	3	2	3	5	2

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

Je třeba též uvést přepisující pravidla.

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 1. termín, skupina A, úloha 3, 19. 1. 2010

Jméno :

---

a) Nechť zobrazení $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ je dáno předpisem $\alpha(a) = [a^5]_5$. Je zobrazení α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_5, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Buď H podmnožina grupy permutací $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$ daná takto:

$$H = \{\, s \in \mathbb{S}_{10} \ \mid \ (\forall\, x \in \{1, \ldots, 10\})(\, 2 \mid (s(x) - x)\,)\ \} \ .$$

Je H normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je grupa $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ izomorfní grupě $(\mathbb{Q}, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 1. termín, skupina B, úloha 3, 19. 1. 2010

Jméno :

---

a) Nechť zobrazení $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ je dáno předpisem $\alpha(a) = [a^4]_4$. Je zobrazení β homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Buď N podmnožina grupy permutací $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$ daná takto:

$$N = \{\, s \in \mathbb{S}_{10} \;\mid\; (\forall\, x \in \{1, \dots, 10\}\,)(\, 5 \mid (s(x) - x)\,)\,\}\ .$$

Je N normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}_{10}, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je grupa $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ izomorfní grupě $(\mathbb{Q}, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 2. termín, úloha 1, 26. 1. 2010

Jméno :

---

a) Definujte polynom nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Je to posloupnost ...

b) Definujte součin dvou polynomů.

c) Proč můžeme psát polynomy ve tvaru $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$?

d) Definujte primitivní polynom (nad $\mathbb{Z}$).

e) Formulujte větu o součinu dvou primitivních polynomů.

f) Dokažte tvrzení z e).

g) Doplňte : $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in$ ......, $a_n \neq 0$, $p \in$ ..., $q \in$ ..., $f(p/q) = 0$, ... $\Rightarrow$ $p \mid$ ....

h) Dokažte tvrzení z g).

i) Doplňte : $f \in$ ......, $p \in$ ..., $q \in$ ..., $r \in$ ...., $f(p/q) = 0 \quad \Rightarrow$ ...... $\mid f(r)$.

j) Dokažte tvrzení z i).

Body : 2,2,2,2,2,8,3,8,3,8.

Algebra I, 2. termín, úloha 2, 26. 1. 2010

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

	1	2	3	4	5	6
a	2	6	6	5	6	6
b	3	4	6	6	4	6

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

Je třeba též uvést přepisující pravidla.

V monoidu M popište relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \, \mathcal{R} \, q \iff (\ \exists \, u, v \in M \ ) \ (\, pu = q \ \& \ qv = p \,) \ ,$$

$$p \, \mathcal{L} \, q \iff (\ \exists \, u, v \in M \ ) \ (\, up = q \ \& \ vq = p \,) \ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 2. termín, úloha 3, 26. 1. 2010

Jméno :

---

a) Nechť zobrazení $\alpha : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{S}_6$ je dáno předpisem $\alpha([a]_6) = (1,2)^a \circ (3,4,5)^a$. Je zobrazení α homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\mathbb{S}_6, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Buď grupa $(G, \oplus)$ dána jako součin spočetně mnoha kopií grupy $(\mathbb{Z}, +)$, tj. $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (= množina všech zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$) a operace $\oplus$ je definována pro $f, g \in G$ takto: $f \oplus g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je zobrazení dané předpisem $(f \oplus g)(i) = f(i) + g(i)$, pro $i \in \mathbb{N}$.

Buď $H = \{\ f \in G \ \mid \ (\exists\ n \in \mathbb{N}\,)(\forall\ i \in \mathbb{N}\,)(\ i \geq n \ \Longrightarrow \ f(i) = 0\,)\ \}$. Je H normální podgrupa grupy $(G, \oplus)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je grupa $(\mathbb{S}_3, \circ) \times (\mathbb{S}_5, \circ)$ izomorfní grupě $(\mathbb{S}_6, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto grupy liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, 3. termín, úloha 1, 9. 2. 2010

Jméno :

---

a) Definujte polynom nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Je to posloupnost ...

b) Definujte součin dvou polynomů.

c) Proč můžeme psát polynomy ve tvaru $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$?

d) Definujte primitivní polynom (nad $\mathbb{Z}$).

e) Formulujte větu o součinu dvou primitivních polynomů.

f) Dokažte tvrzení z e).

g) Doplňte : $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in$ ......, $a_n \neq 0$, $p \in$ ..., $q \in$ ..., $f(p/q) = 0$, ... $\Rightarrow$ $p \mid$ ....

h) Dokažte tvrzení z g).

i) Doplňte : $f \in$ ......, $p \in$ ..., $q \in$ ..., $r \in$ ...., $f(p/q) = 0,$ .... $\Rightarrow$ ...... $\mid f(r)$.

j) Dokažte tvrzení z i).

Body : 2,2,2,2,2,8,3,8,3,8.

Algebra I, 3. termín, úloha 2, 9. 2. 2010

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

	1	2	3	4	5	6
a	3	4	6	6	4	6
b	2	6	6	5	6	6

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

Je třeba též uvést přepisující pravidla.

V monoidu M popište relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M \ ) \ (\ pu = q \ \& \ qv = p \ ) \ ,$$

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M \ ) \ (\ up = q \ \& \ vq = p \ ) \ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, 3. termín, úloha 3, 9. 2. 2010

Jméno :

---

a) Nechť zobrazení $\alpha : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ je dáno předpisem $\alpha(f) = f^2$. Je zobrazení α homomorfismus z okruhu $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ do sebe ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Uvažujme grupu permutací $\mathbb{S}(\mathbb{N})$ nekonečné množiny $\mathbb{N}$. Buď

$$H = \{\, f \in \mathbb{S}(\mathbb{N}) \;\mid\; (\exists\, n \in \mathbb{N})(\, f^n = id\,) \,\} \,.$$

Je H normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}(\mathbb{N}), \circ)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Existuje injektivní homomorfismus z grupy $(\mathbb{S}_4, \circ)$ do grupy $(\mathbb{S}_3, \circ) \times (\mathbb{S}_3, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, uvedení homomorfismu / důkaz neexistence : 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra I, náhradní termín, úloha 1, 11. 2. 2010

Jméno :

Nechť $T(A)$ značí množinu všech transformací množiny A a nechť $S(A)$ značí množinu všech permutací množiny A (= bijekcí A na A). Nechť $\circ$ je operace skládání zobrazení. Pro $A = \{1, \ldots, n\}$ píšeme stručně T_n a S_n.

a) Pro která $m, n \in \mathbb{N}$ je $(T_m, \circ)$ izomorfní s podpologrupou grupy $(S_n, \circ)$? Právě pro ....

Skutečně, ...

....

b) Cayleyho věta pro monoidy :
Libovolný monoid $(M, \cdot, e)$ je izomorfní .... monoidu.......................... .

Důkaz : Skutečně, definujeme

$\rho : M \to$ .... , $a \mapsto \rho_a$, kde

$\rho_a : x \mapsto$ ....

Pak $\rho_a \in$ .... ,

....

....

c) Cayleyho věta pro grupy :
Libovolná grupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Využijeme-li b), zbývá dokázat, že ....
A to platí, neboť ....

....

d) Cayleyho věta pro pologrupy :
Libovolná pologrupa $(M, \cdot)$ je izomorfní ....

Důkaz : Skutečně, ...

....

e) Pro která $n \in \mathbb{N}$ v $(S_{10}, \circ)$ existuje podgrupa izomorfní se $(\mathbb{Z}_n, +)$? Právě pro ....

Skutečně, ...

....

....

Body : 6,9,9,8,8

Algebra I, náhradní termín, úloha 2, 11. 2. 2010

Jméno :

V monoidu $T(A)$ všech transformací množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s operací skládání generujte podmonoid $M \subseteq T(A)$ množinou $\{a, b\}$, kde

	1	2	3	4	5	6
a	3	4	6	6	4	6
b	2	6	6	5	6	6

Výsledek zadejte multiplikativní tabulkou monoidu M. Přitom řádky i sloupce indexujte reprezentanty ve vojenském uspořádání.

Je třeba též uvést přepisující pravidla.

V monoidu M popište relace $\mathcal{R}$ a $\mathcal{L}$, kde pro $p, q \in M$:

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ pu = q \ \&\ qv = p\ )\ ,$$

$$p \,\mathcal{L}\, q \iff (\ \exists\, u, v \in M\ )\ (\ up = q \ \&\ vq = p\ )\ .$$

Pozor : transformace aplikujeme zprava.

Algebra I, náhradní termín, úloha 3, 11. 2. 2010

Jméno :

---

a) Nechť zobrazení $\alpha : \mathbb{Z}_2[x] \to \mathbb{Z}_2[x]$ je dáno předpisem $\alpha(f) = f^2$. Je zobrazení α homomorfismus z okruhu $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)$ do sebe ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Uvažujme grupu permutací $\mathbb{S}(\mathbb{N})$ nekonečné množiny $\mathbb{N}$. Buď

$$H = \{\, f \in \mathbb{S}(\mathbb{N}) \ \mid \ (\,\exists\, n \in \mathbb{N}\,)(\, f^n = id\,)\,\}\ .$$

Je H normální podgrupa grupy $(\mathbb{S}(\mathbb{N}), \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Existuje injektivní homomorfismus z grupy $(\mathbb{S}_5, \circ)$ do grupy $(\mathbb{S}_4, \circ) \times (\mathbb{S}_4, \circ)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení homomorfismu / důkaz neexistence : 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.