Relace a zobrazení - příklady

Příklad 1.

Na množině $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je dána relace $R = \{ (x, y) \mid x, y \in X, x \text{ dělí } y \}$. Zapište R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte inverzní relaci.

Řešení:
Vytvoříme si relační tabulku.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0
4	1	1	0	1	0	0	0
5	1	0	0	0	1	0	0
6	1	1	1	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	1

Pomocí tabulky snadno zapíšeme R výčtem prvků.
$R = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7) \}$
Definiční obor Dom $R = X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
Obor hodnot Im $R = X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
Inverzní relace $R^{-1} = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7) \}$

Příklad 2.

Nechť $R_1 = \{ (1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8) \}$, $R_2 = \{ (2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u) \}$. Zapište výčtem prvků relace $R^{-1}{}_1$, $R^{-1}{}_2$, $R_2 \circ R_1$, $(R_2 \circ R_1)^{-1}$, $R^{-1}{}_1 \circ R^{-1}{}_2$.

Řešení:
$R^{-1}{}_1 = \{ (2, 1), (6, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 3), (8, 3) \}$
$R^{-1}{}_2 = \{ (u, 2), (s, 4), (t, 4), (t, 6), (u, 8) \}$
$R_2 \circ R_1 = \{ (1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) \}$
$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R^{-1}{}_1 \circ R^{-1}{}_2 = \{ (u, 1), (s, 2), (s, 3), (t, 2), (t, 3), (u, 3), (t, 1) \}$

Příklad 3.

Nechť f(x) = sin x, g(x) = ln x, h(x) = 2x. Stanovte definiční obor a obor hodnot funkce g ° f ° h. Určete (g ° f ° h)(pí / 4).

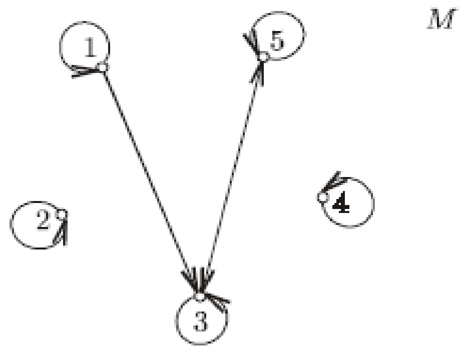
Řešení:
g ° f ° h = ln (sin2x).
Určíme Dom a Im jednotlivých funkcí:
Dom h = R, Im h = R
Dom f = R, Im f = <-1, 1>
Dom g = (0, nekonečno), Im g = R
Je třeba si uvědomit, že výstup vnitřní funkce se stává vstupem funkce vnější. Funkce g příjmá kladná reálná čísla, ale na výstupu funkce f je interval <-1, 1>. Im f "průnik" Dom g je interval (0, 1>, tedy nový definiční obor vnější funkce g. Musíme zjistit, pro která x nabývá funkce f hodnot z intervalu (0, 1>. Protože ale Dom f = Im h = Dom h = R, můžeme tak činit již pro složenou funkci f ° h, tedy pro sin2x.

Z grafu funkce sin2x je vidět, že tato funkce nabývá hodnot (0, 1> pro všechna x ze sjednocení otevřených intervalů(k*pí, k*pí + pí/2), kde k ∈ Z.. Toto sjednocení intervalů je také definičním oborem složené funkce g ° f ° h. Pro zjištění oboru hodnot si stačíuvědomit, která x jsou vstupem funkce g. To jsme zjistili již při určování definičního oboru složené funkce. Je jím interval (0, 1>.

Z grafu přirozeného logaritmu, tedy funkce g, je názorně vidět, že pro x ∈ (0, 1> nabývá funkce g hodnot v intervalu (-nekonečno, 0> a tento interval je také oborem hodnot složené funkce g ° f ° h.

Zbývá už jen určit funkční hodnotu pro x = pí/4.
pí/4 ∈ Dom (g ° f ° h) => (g ° f ° h)(pí/4) = ln (sin pí/2) = ln 1 = 0.
Výsledky
Dom (g ° f ° h) = všechna x ze sjednocení otevřených intervalů(k*pí, k*pí + pí/2), kde k ∈ Z.
Im (g ° f ° h) = (-nekonečno, 0>
(g ° f ° h)(pí/4) = 0

Příklad:
Je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete vlastnosti relace R v množině M, která je graficky znázorněna na následujícím uzlovém grafu.

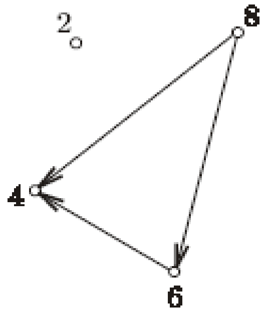


Relaci R si můžeme vypsat i výčtem prvků, tj. výčtem uspořádaných dvojic:
$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (5, 5)\}$.

Řešení:
Vlastnosti určíme z grafu nebo z výčtu prvků (uspořádaných dvojic):
- R je reflexivní, neboť z každého uzlu je smyčka grafu; pro každý prvek $x \in M$ platí, že $(x, x) \in R$;
- R není antireflexivní, protože uzlový graf nesmí obsahovat ani jednu smyčku, tj. ani jedna uspořádaná dvojice (x, x) nesmí být prvkem relace R;
- R není symetrická, protože orientovaná hrana směřuje z uzlu 1 do uzlu 3 a nevrací se zpět, tzn. $(1, 3) \in R \Rightarrow (3, 1) \notin R$;
- R není antisymetrická vzhledem k tomu, že na grafu je znázorněna orientovaná hrana vycházející z uzlu 3 do uzlu 5 a také hrana z uzlu 5 do uzlu 3; pro prvky 3, 5 neplatí $(3, 5) \in R \Rightarrow (5, 3) \notin R$;
- R není tranzitivní, neboť když vychází orientovaná hrana z uzlu 1 do uzlu 3 a z uzlu 3 do 5, pak schází orientovaná hrana z uzlu 1 do uzlu 5; tzn. $[(1, 3) \in R \wedge (3, 5) \in R\,] \Rightarrow (1, 5) \notin R$;

Příklad:

Je dána množina $M = \{2, 4, 6, 8\}$, tj. množina všech jednociferných sudých přirozených čísel a relace $R = \{(8, 4), (6, 4), (8, 6)\}$. Určete její vlastnosti.



Řešení:

- není reflexivní - schází uspořádané dvojice (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8);
- je antireflexivní - relace neobsahuje žádnou z uspořádaných dvojic (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8); není symetrická - relace by musela obsahovat i uspořádané dvojice (4, 8), (4, 6), (6, 8);
- je antisymetrická, protože různé uzly jsou spojeny nejvýše jednou orientovanou hranou;
- je tranzitivní - $[(8, 6) \in R \wedge (6, 4) \in R] \Rightarrow (8, 4) \in R$;

Příklad:

Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $R = \{(e, d), (c, c), (b, d), (a, b), (a, a)\}$ v této množině. Relaci K doplňte minimálním počtem uspořádaných dvojic tak, aby byla

a) reflexivní,
b) symetrická,
c) tranzitivní,

Řešení:

a) Aby byla relace reflexivní, musí obsahovat všechny dvojice typu (x, x). Musíme tedy doplnit relaci R o uspořádané dvojice (b, b), (d, d), (e, e). Označme $R_a = \{(b, b), (d, d), (e, e)\}$ a R_r relaci reflexivní, potom $R_r = R \cup R_a$.

b) Aby byla relace symetrická v M, musí pro každé dva prvky x, y z množiny M platit $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$. Doplníme uspořádané dvojice $(b$, a$)$, (d, b), (d, e). Označme $R_b = \{(b, a), (d, b), (d, e)\}$ a R_s relaci symetrickou, potom $R_s = R \cup R_b$.

c) Relace je v M tranzitivní, právě když pro každé tři prvky x, y, z z množiny M platí $[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \Rightarrow (x, z) \in R$, proto doplníme relaci o prvky (e, b), (a, d), (e, a). Označme $R_c = \{(e, b), (a, d), (e, a)\}$ a R_t relaci tranzitivní, potom $R = R \cup R_c$.

Příklad:
Určete všechny tranzitivní relace v množině $M = \{1, 2\}$.

Řešení:
Při hledání jednotlivých relací, které mají požadovanou vlastnost - tranzitivnost musíme si uvědomit, jak tato vlastnost je definována.
Relace R v množině M je tranzitivní, právě když platí:
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\,] \Rightarrow (x, z) \in R.$
Implikace dvou výroků je nepravdivý výrok, právě když je předpoklad implikace výrok pravdivý a tvrzení implikace výrok nepravdivý. Takže, je-li
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\,] \Rightarrow (x, z) \notin R.$
není relace tranzitivní (implikace je výrok nepravdivý). V ostatních případech (po dosazení prvků množiny L):
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\,] \Rightarrow (x, z) \in R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \notin R\,] \Rightarrow (x, z) \in R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \notin R \wedge (y, z) \in R\,] \Rightarrow (x, z) \in R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \notin R \wedge (y, z) \notin R\,] \Rightarrow (x, z) \in R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \notin R \wedge (y, z) \in R\,] \Rightarrow (x, z) \notin R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \notin R\,] \Rightarrow (x, z) \notin R,$
$\forall\, x, y, z \in M : [(x, y) \notin R \wedge (y, z) \notin R\,] \Rightarrow (x, z) \notin R\,.$
je implikace výrok pravdivý, tedy relace je tranzitivní.

Úloha má 13 řešení:
$R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(1, 1)\}$, $R_3 = \{(2, 2)\}$, $R_4 = \{(1, 2)\}$, $R_5 = \{(2, 1)\}$,
$R_6 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $R_7 = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $R_8 = \{(1, 1), (1, 2)\}$,
$R_9 = \{(1, 1), (2, 1)\}$, $R_{10} = \{(2, 2), (2, 1)\}$, $R_{11} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$,
$R_{12} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$, $R_{13} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.