Vektory

Teorie:

vektor = uspořádaná n-tice čísel

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u \in R^3$$

sčítání - po složkách

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u + v = w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

skalární součin - po složkách

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 2 + 0 + 3 = 5$$

násobení skalárem $a \in R$

$$a = 5, a \cdot u = \begin{pmatrix} 5 \cdot u_1 \\ 5 \cdot u_2 \\ 5 \cdot u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

norma (délka) vektoru: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

úhel mezi vektory u, v:

$$\cos \phi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

lineární kombinace: $u = a_1 v_1 + \ldots a_m v_m, a_i \in R, v_i \in R^m, i = 1, \ldots, m$

lineární (ne)závislost (LN): vektory $u_i \in R^m$, skaláry $a_i \in R, i = 1, \ldots, m$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots a_m u_m = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$$

$\Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé

Příklady:

- $u = (1; 2; 1)', v = (2; 3; 1)', w = (1; 3; 2)'$

  1. sečtěte $u + v + w$ [(4;8;4)']
  2. zjistěte jejich délku [$\|u\| = \sqrt{6}, \|v\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{14}$]
  3. zjistěte, zda u, v, w tvoří množinu lineárně nezávislých vektorů, pokud ne, vyberte z nich podmnožinu lineárně nezávislých vektorů [netvoří, odebereme kterýkoliv]

- Máme vektory $u = (1; 0; 5)'$ a $v = (2; 3; 1)'$. Chceme vytvořit vektor $w = (-2; -9; 17)'$. Jaké je třeba zvolit koeficienty lineární kombinace? [$w = au + bv$, $a = 4; b = -3$]

- Vyberte z následujících vektorů množinu lineárně nezávislých: $u_1 = (1; 2; -3)', u_2 = (2; -1; 3)', u_3 = (2; 4; -6)', u_4 = (-3; 4; 9)', u_5 = (6; 0; 1)', u_6 = (4; 1; -2)'$ [např. u_1, u_2, u_5]

- Vektory mohou být zadány v různých tvarech. Zapište následující ve tvaru n-tice a zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé:

  1. $x^2 + x + 3; x + 1; 2x^2 + 3x + 1; x^2 - 3$ [LZ]
  2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ [LZ]
  3. $1 + x; 1 - x; 2 + x - x^2$ [LN]

Matice

Teorie:

matice typu m x n: obdélníkové schéma - m řádků n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sčítání matic: - po složkách: $A = (a_{ij}); B = (b_{ij}); A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$
násobení skalárem: $c \in R$; $cA = (ca_{ij})$
násobení matic: A typu mxn; B typu nxp; $C = AB = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})$ typu mxp
!!NENÍ komutativní ani pro čtvercové matice!!
mocnina matice: - pouze pro čtvercové matice: $A^n = A^{n-1}A$
hodnost matice = její maximální počet lineárně nezávislých řádků (zn. $h(A)$)

Čtvercová matice - pojmy: nulová matice: O; $A + O = O + A = A$
jednotková matice: $IneboE$; $EA = AE = A$
horní a dolní trojúhelníková matice: - prvky pouze na diagonále a nad (pod) ní
diagonální matice: - prvky pouze na diagonále
transponovaná matice: $A^T = (a_{ji})$
symetrická matice: $A = A^T$
inverzní matice: A^{-1}: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ - určena jednoznačně pokud existuje, existuje pokud je matice A regulární ($h(A) = n$)
hledáme $(A|E)$ řádkovými úpravami upravíme na tvar $(E|*)$, kde $* = A^{-1}$

Systémy lineárních rovnic

Teorie:

lineární rovnice: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, a_i koeficienty, x_i neznámé
systém lineárních rovnic (SLR):

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

SLR má aspoň 1 řešení => konzistentní SLR
SLR nemá řešení => nekonzistentní SLR
hledáme všechna řešení, tj. množinu řešení SLR, jednotlivá řešení zapisujeme ve tvaru uspořádaných n-tic
řešíme početně (úpravou matice) nebo graficky (2 rovnice o 2 neznámých)
ekvivalentní SLR <=> systémy mají stejnou množinu řešení
řešení získáme pomocí EŘO:

- záměna řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku jiného řádku

počet řešení:

- právě jedno
- nekonečně mnoho ¡=¿ aspoň 1 neznámý parametr
- žádné

Frobeniova věta: Systém lineárních rovnic má (aspoň jedno) řešení právě tehdy, když $h(A) = h(A|b)$
Kramerovo pravidlo: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, kde A_i je matice vyniklá dosazením vektoru b místo i-tého řádku matice A

Příklady:

- Jsou dány matice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

  1. vypočtěte $A + B; A + C; C - D; A - A$

  $$[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}; nelze; \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]$$

  2. vypočtěte $AB; 2A^2; AC; CD; BA$

  $$[\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -19 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 15 & -5 \\ 11 & 33 & -11 \end{pmatrix}; nelze; \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}]$$

- Vypočtěte $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}]$

- Určete hodnosti matic a najděte jejich inverze:

  1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$[h = 2; $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$]
  2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;[h=2, nelze]

     $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;[h=2; nelze]

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

- Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí matic:

  1. $\begin{matrix} x + 2y = 2 \\ 3x + 5y = 1 \end{matrix}$; $[x = -8; y = 5]$

2. $\begin{array}{c} 4x+2y-6z=4 \\ x-y-3z=-5 \\ x+2y=1 \end{array}$; [nema reseni]

3. $\begin{array}{c} 4x+y+3z=10 \\ -2y-3z=-9 \\ 2x+y+2z=7 \end{array}$; $[x=1; y=3; z=1]$

- Určete řešení SLR daných maticí:

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $[\{(1;0;1;-1)\}]$

2. $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $[\{(0;0;0;0)\}]$

3. $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $[\{(0;t;-t;0), t \in R\}]$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $[nemareseni]$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & -6 \end{array}\right)$ $[\{(1/5(t-2); 1/5(8t-6); t), t \in R\}]$

- Řešte v závislosti na parametru $a \in R$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1+a & 0 & 2 \\ 1 & a & a+2 & 3 \end{array}\right)$$

$[NRa = 0; a \neq 0 : (\frac{-a^2-3a-4}{a}; \frac{a+4}{a}; \frac{2}{a})]$

- Řešte v závislosti na parametrech $a, b \in R$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Řešte Kramerovým pravidlem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

[(5;-7;4)]