JAK ZRYCHLIT LAPLACE?

Příklad Užitím Laplaceovy věty spočítejte determinant $|A|$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Provedeme rozvoj podle 2. a 3. sloupce zároveň (fixně zvolený 2.,3. sloupec):

$$\begin{aligned} |A| = & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{(2+3)+(1+2)} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(2+3)} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{(1+4)+(2+3)} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{(2+3)+(2+3)} + \\ & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(2+3)} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} (-1)^{(3+4)+(2+3)} \end{aligned}$$

a tak dál, výsledek je 100 (počítali jsme na cviku Laplac. rozvojem podle jednoho sloupce).

Tedy vezmu 2 sloupce a 2 řádky, ty se samozřejmě nekříží jen v jednom čísle, ale ve čtyřech, proto musím vzít determinant. Pak opět minor, který vznikne když ty dva sloupce a dva řádky, které jsme si zvolili, "vynecháme". No a zbývá ona (-1) umocněná na součet pořadí řádků a sloupců. Barevné vysvětlení viz. obrázek Laplace.jpg.

POZOR, pokud děláme rozvoj podle dvou sloupců zároveň, sčítanec bude mít tolik členů, kolik je různých dvojic řádků! V tomhle případě $\binom{4}{2} = 6$.
Zajímavé je všimnout si, že když děláme rozvoj podle 3 sloupců zároveň (u matice 4x4), dostaneme totéž co rozvojem podle jednoho sloupce, akorát tak nějak "z druhé strany".

Tohle řešení může být teoreticky rychlejší než rozvíjet po jednom sloupci, ale prakticky se pravděpodobnost, že uděláte numerickou chybu, nebezpečně blíží 1 (vlastní zkušenost). Tak je na vás do čeho půjdete.

JAK VYTÝKAT Z DETERMINANTU?

Máme-li matici skalárů, můžeme z ní samozřejmě vytýkat, např:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Máme-li ovšem determinant této matice, musíme vytknout $2^{(počet\ řádků)}$, tedy:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

A proč? Stačí se zamyslet nad tím, jak se počítá determinant - prvky se v něm **násobí**.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 2.4 = -4$

ŠPATNĚ: $2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.(1.1 - 1.2) = -2 \neq |A|$

DOBŘE: $2^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.(1.1 - 1.2) = -4 = |A|$