Matice rotace o 90° v kladném smyslu v $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V bázi $((1,0),(0,2))$ má rotace o 90° v kl. smyslu matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Snadno spočteme matici rotace v bázi dané osou rotace a dvěma navzájem kolmými vektory, které leží v rovině kolmé na osu.

Rovina kolmá na $(1,1,1)$ má rovnici

$$a+b+c=0$$

V této rovině volme vektor $(1,-1,0)$

Najdeme v této rovině vektor kolmý na $(1,-1,0)$, nechť jeho souřadnice jsou (a,b,c) a tedy

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \Rightarrow 2a+c=0 \Rightarrow c=-2a \\ a-b &= 0 \Rightarrow a=b \end{aligned}$$

$$(1,1,-2)$$

V bázi $f = \big((1,1,1), (1,-1,0), (1,1,-2)\big)$ je matice rotace následující

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Matice přechodu od báze f ke st. bázi $e = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

tedy matice rotace ve st. bázi je

$$TAT^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 6 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -9 & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda)(-7-\lambda) + 54(2-\lambda)$$

$$= (16-10\lambda+\lambda^2)(-7-\lambda) + 54(2-\lambda) =$$

$$= (-\lambda^3+3\lambda^2+54\lambda-112) + 108 - 54\lambda =$$

$$= -\lambda^3+3\lambda^2-4 = (\lambda+1)(-\lambda^2+4\lambda-4) =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

	-1	3	0	-4
-1	-1	4	-4	0

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -z$$

Vlastní vektory příslušné vl. hodnotě 2

jsou $\langle (1,0,-1), (0,1,0) \rangle$,

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -9 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Báze vekt. prostoru je

$$\underset{A}{\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V této bázi má matice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$ souřadnice (a, b, c, d, e, f).

Naše matice má souřadnice $(3, 1, 0, 1, 2, 2)$.

Její velikost ve sk. s. součinu daném uvedenou bází je $\sqrt{3^2+1^2+0^2+1^2+2^2+2^2} = \sqrt{19}$

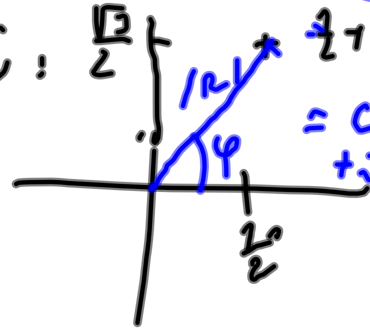
Vyřešme nejprve homogenní rci:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$$

Char. polynom je

$$x^2 = x - 1$$

$x^2 - x + 1$ s kořeny $\dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$z = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Reálná báze prostoru řešení je tvořena posloupnostmi

$y_n = \cos\frac{n\pi}{3}$ a $z_n = \sin\frac{n\pi}{3}$, tedy obecné řešení dané homogenní rovnice je tvaru $a\cdot\cos\frac{n\pi}{3} + b\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Najdeme metodou neurčitých koeficientů nejprve, tzv. partikulární řešení p_n dané nehomogenní LRR. Hledejme řešení ve tvaru $p_n = cn + d$, $c, d \in \mathbb{R}$

Chci aby

$$p_{n+2} = p_{n+1} - p_n + 2n \quad , \text{čili}$$

$$\underbrace{c(n+2)+d}_{p_{n+2}} = \underbrace{c(n+1)+d}_{p_{n+1}} - \underbrace{cn-d}_{p_n} + 2n$$

$$n: \quad c = c - c + 2 \Rightarrow c = 2$$

$$n^0: \quad 2c + d = c + d - d \Rightarrow d = -c = -2$$

$$p_n = 2n - 2$$

Libovolné řešení dané nehomogenní lin. RR je $2n-2+a\cdot\cos\frac{n\pi}{3}+b\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$, $a, b\in\mathbb{R}$

Určíme a, b tak aby splňovaly poč. podmínky:

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1$$

$n=0: \quad 1 = -2 + a \Rightarrow a = 3$

$n=1: \quad 1 = 2\cdot 1 - 2 + a\cdot\cos\frac{\pi}{3} + b\sin\frac{\pi}{3} =$

$$= \frac{3}{2} + b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Jediná posloupnost vyhovující daným podmínkám je dána jako $x_n = 2n-2+3\cdot\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Asymptotické chování modelu je dáno vlastními hodnotami a čísly:

Vlastní čísla jsou $2, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

vlr. vektor příslušný číslu 2 je

$[4, 2, 1]$

Populace se v jednom kroku zdvojnásobí a poměr nových, středně starých a starých úředníků bude cca $4:2:1$.

Určete kolmou projekci vektoru $(1,2,3)$ do roviny $x=y$ v $\mathbb{R}^3$.

i) V bázi $\big((1,-1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\big)$ má kolmá projekce matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matice projekce je

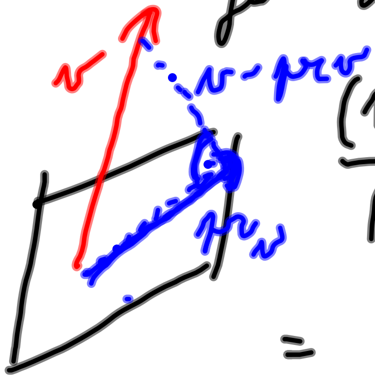
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) spočítáme projekci pomocí ortogonální báze dané roviny:

$\big((1,1,0),\ (0,0,1)\big)$.

Projekce vektoru $(1,2,3)$ do dané roviny je dána jako



$$\frac{(1,2,3)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}\cdot(1,1,0)+\frac{(1,2,3)\cdot(0,0,1)}{(0,0,1)\cdot(0,0,1)}\cdot(0,0,1)=$$

$$=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)+(0,0,3)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)$$

Kontrola: vektor $(1,2,3)-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

je kolmý k dané rovině ✓