Příklad 1. *Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů* $(1,2,3,1)$, $(1,0,-1,1)$, $(2,1,-1,3)$ *a* $(0,0,3,2)$.

Řešení. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. □

Příklad 2. *Nechť jsou dány podprostory U a V generované po řadě vektory*

$$(1,1,-3)\,,\ (1,2,2) \quad a \quad (1,1,-1)\,,\ (1,2,1)\,,\ (1,3,3)$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte průnik těchto podprostorů.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podprostor V má dimenzi pouze 2 (nejedná se tedy o celý prostor $\mathbb{R}^3$), neboť

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

a neboť libovolná dvojice z uvažovaných třech vektorů je očividně lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že také podprostor U má dimenzi 2. Současně je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

a proto vektor $(1,1,-1)$ nemůže náležet do podprostoru U. Průnikem rovin procházejících počátkem (dvojrozměrných podprostorů) v trojrozměrném prostoru musí být alespoň přímka. V našem případu je jím právě přímka (podprostory nejsou totožné). Určili jsme dimenzi průniku – je jednodimenzionální. Všimneme-li si, že

$$1 \cdot (1,1,-3) + 2 \cdot (1,2,2) = (3,5,1) = 1 \cdot (1,1,-1) + 2 \cdot (1,2,1)\,,$$

dostáváme vyjádření hledaného průniku ve tvaru množiny všech skalárních násobků vektoru $(3,5,1)$ (jedná se o přímku procházející počátkem s tímto směrovým vektorem). □

Příklad 3. *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány třídimenzionální (trojrozměrné) podprostory*

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \qquad V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi a libovolnou bázi podprostoru $U \cap V$.

Řešení. Do podprostoru $U \cap V$ náleží právě ty vektory, které je možné obdržet jako lineární kombinaci vektorů u_i a také jako lineární kombinaci vektorů v_i. Hledáme tedy čísla $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ taková, aby platilo

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. hledáme řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & y_1 & - & y_2 & - & y_3, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -y_1 & + & y_2 & - & y_3, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -y_1 & - & y_2 & + & y_3. \end{array}$$

Při maticovém zápisu této homogenní soustavy (a při zachování pořadí proměnných) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak řešení

$$x_1 = -2t,\ x_2 = -2s,\ x_3 = 2s + 2t,\ y_1 = -s - t,\ y_2 = s,\ y_3 = t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Odtud dosazením získáváme obecný vektor průniku

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t - 2s \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\dim U \cap V = 2, \quad U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\square$

Příklad 4. *Uveďte nějakou bázi podprostoru*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru reálných matic 3×2. *Tuto bázi doplňte na bázi celého prostoru.*

Řešení. Připomeňme, že bázi podprostoru tvoří množina lineárně nezávislých vektorů, které generují uvažovaný podprostor. Protože

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

celý podprostor U je generován pouze prvními dvěma maticemi. Ty jsou potom lineárně nezávislé (jedna není násobkem druhé), a tak zadávají bázi. Chceme-li ji doplnit na bázi celého prostoru reálných matic 3×2, musíme najít další čtyři matice (dimenze celého prostoru je zjevně 6) takové, aby výsledná šestice byla lineárně nezávislá. Můžeme využít toho, že známe např. standardní bázi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prostoru reálných matic 3×2, který lze přímo ztotožnit s $\mathbb{R}^6$. Sepíšeme-li dva vektory báze U a vektory standardní báze celého prostoru v tomto pořadí, výběrem prvních 6 lineárně nezávislých vektorů dostaneme hledanou bázi. Pokud však uvážíme, že kupř.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

můžeme ihned bázového vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podprostoru U doplnit maticemi (vektory prostoru matic)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na bázi. Upozorněme, že výše uvedený determinant lze vyčíslit velmi snadno – je roven součinu prvků na diagonále, neboť matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru (nad diagonálou jsou všechny prvky nulové). $\square$

Příklad 5. *Stanovte vektorový podprostor (prostoru $\mathbb{R}^4$) generovaný vektory*

$$u_1 = (-1, 3, -2, 1), \quad u_2 = (2, -1, -1, 2), \quad u_3 = (-4, 7, -3, 0), \quad u_4 = (1, 5, -5, 4)$$

vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i (tj. vybráním báze).

Řešení. Sepíšeme vektory u_i do sloupců matice a obdrženou matici upravíme pomocí řádkových elementárních transformací. Takto získáme

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že lineárně nezávislé jsou právě vektory u_1, u_2, u_4, tj. právě ty vektory odpovídající sloupcům, které obsahují první nenulové číslo nějakého řádku. Navíc odsud plyne (viz třetí sloupec)

$$2 \cdot (-1, 3, -2, 1) - (2, -1, -1, 2) = (-4, 7, -3, 0).$$

$\square$

Příklad 6. *Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu získejte ortogonální bázi podprostoru*

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Množina řešení uvedené homogenní lineární rovnice je zřejmě vektorovým prostorem s bází

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory ortogonální báze získané užitím Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu budeme značit v_1, v_2, v_3. Nejprve položme $v_1 = u_1$. Dále

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2^T \cdot v_1}{||v_1||^2}\, v_1 = u_2 - \frac{1}{2}\, v_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right)^T,$$

resp. zvolme násobek $v_2 = (-1,-1,2,0)^T$. Následně je

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3^T \cdot v_1}{||v_1||^2} v_1 - \frac{u_3^T \cdot v_2}{||v_2||^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{6} v_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T.$$

Máme tedy celkem

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dodejme, že pro jednoduchost příkladu lze bezprostředně uvést ortogonální bázi z vektorů

$$(1,-1,0,0)^T, \quad (0,0,1,-1)^T, \quad (1,1,-1,-1)^T$$

nebo

$$(-1,1,1,-1)^T, \quad (1,-1,1,-1)^T, \quad (-1,-1,1,1)^T.$$

□

Příklad 7. *Nalezněte matici rotace v kladném smyslu o úhel $\pi/3$ kolem přímky procházející počátkem s orientovaným směrovým vektorem $(1,1,0)$ ve standardní bázi $\mathbb{R}^3$.*

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy x;
- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvnímu zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Takto dostaneme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy y;
- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 8. *Určete matici A, která ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ zadává kolmou projekci do vektorového podprostoru generovaného vektory $u_1 = (-1, 1, 0)$ a $u_2 = (-1, 0, 1)$.*

Řešení. Nejprve poznamenejme, že uvedený podprostor je rovinou procházející počátkem s normálovým vektorem $u_3 = (1, 1, 1)$. Uspořádaná trojice $(1, 1, 1)$ je totiž očividným řešením soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. vektor u_3 je kolmý na vektory u_1, u_2. Podotkněme rovněž, že jsme tento příklad již vyřešili (matici A známe z dřívějšího příkladu).

Při dané projekci se vektory u_1 a u_2 musejí zobrazit na sebe a vektor u_3 potom na nulový vektor. V bázi složené po řadě z vektorů u_1, u_2, u_3 je proto matice této projekce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matic přechodu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

od báze (u_1, u_2, u_3) ke standardní bázi a od standardní báze k bázi (u_1, u_2, u_3) získáme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 9. *Zjistěte, zda je množina*

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ |\,x_1\,| = |\,x_2\,| = |\,x_3\,|\}$$

podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a množina

$$U_2 = \{ax^2 + c;\ a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem prostoru polynomů stupně nejvýše 2.

Řešení. Množina U_1 není vektorovým (pod)prostorem. Vidíme např., že je

$$(1,1,1) + (-1,1,1) = (0,2,2) \notin U_1.$$

Množina U_2 ovšem podprostor tvoří (nabízí se přirozené ztotožnění s $\mathbb{R}^2$), protože

$$\left(a_1x^2 + c_1\right) + \left(a_2x^2 + c_2\right) = (a_1 + a_2)\,x^2 + (c_1 + c_2), \quad k \cdot \left(ax^2 + c\right) = (ka)\,x^2 + kc$$

pro všechna čísla $a_1, c_1, a_2, c_2, a, c, k \in \mathbb{R}$. □

Příklad 10. *Nechť jsou dány libovolné lineárně nezávislé vektory u, v, w, z ve vektorovém prostoru V. Rozhodněte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory*

$$u - 2v, \quad 3u + w - z, \quad u - 4v + w + 2z, \quad 4v + 8w + 4z.$$

Řešení. Lze ukázat, že z lineární nezávislosti u, v, w, z plyne, že uvažované vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory

$$(1,-2,0,0), \quad (3,0,1,-1), \quad (1,-4,1,2), \quad (0,4,8,4).$$

Neboť je

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

správná odpověď zní „lineárně nezávislé“. □

Příklad 11. *Najděte ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_3, x_2 = x_3 + 6x_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Řešení. Ortogonální doplněk $U^\perp$ tvoří právě ty vektory, které jsou kolmé na každé řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0, \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 6x_4 & = & 0. \end{array}$$

Vektor je ovšem řešením této soustavy tehdy a jenom tehdy, když je kolmý na oba vektory $(1,0,-1,0)$, $(0,1,-1,-6)$. Je tedy

$$U^\perp = \{a \cdot (1,0,-1,0) + b \cdot (0,1,-1,-6);\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

□

Příklad 12. *Určete, zda jsou podprostory*

$$U = \langle (2,1,2,2) \rangle\,, \quad V = \langle (-1,0,-1,2)\,, (-1,0,1,0)\,, (0,0,1,-1) \rangle$$

prostoru $\mathbb{R}^4$ na sebe kolmé. Pokud ano, je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tj. je $U^\perp = V$?

Řešení. Vektor, který zadává podprostor U, je kolmý na každý ze tří vektorů, které generují V. Podprostory jsou tak na sebe kolmé. Avšak není pravda, že $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. Podprostor V je totiž pouze dvojdimenzionální, protože

$$(-1, 0, -1, 2) = (-1, 0, 1, 0) - 2\,(0, 0, 1, -1)\,.$$

□

Příklad 13. *V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ stanovte dimenzi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li U generován vektory*

(a) $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t)$;

(b) $u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_3 = (-2, -2, -2)$.

Řešení. V prvním případu je $\dim U = 2$ pro $t \in \{1, 2\}$, jinak je $\dim U = 3$. Ve druhém případu je $\dim U = 2$ pro $t \neq 0$ a $\dim U = 1$ pro $t = 0$. □

Příklad 14. *Sestrojte ortogonální bázi podprostoru*

$$\langle\, (1, 1, 1, 1),\, (1, 1, 1, -1),\, (-1, 1, 1, 1)\,\rangle$$

prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem lze obdržet výsledek

$$((1, 1, 1, 1),\, (1, 1, 1, -3),\, (-2, 1, 1, 0))\,.$$

□

Příklad 15. *V prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -7)$, $(4, -2, 4, 14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.*

Řešení. Při zachování pořadí podprostorů ze zadání jsou ortogonálními bázemi např.

$$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7))$$

a

$$((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)).$$

□

Příklad 16. *Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vektory*

$$(1, 1, 2, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 1, a), \quad (1, b, 2, 3, -2)$$

v prostoru $\mathbb{R}^5$ po dvou ortogonální?

Řešení. Výsledek je $a = 9/2$, $b = -5$, neboť musí mj. platit

$$1 + b + 4 + 0 + 0 = 0, \quad 1 - b + 0 + 3 - 2a = 0.$$

$\square$

Příklad 17. *V prostoru $\mathbb{R}^5$ uvažujte podprostor generovaný vektory*

$$(1, 1, -1, -1, 0), \quad (1, -1, -1, 0, -1), \quad (1, 1, 0, 1, 1), \quad (-1, 0, -1, 1, 1).$$

Najděte nějakou bázi jeho ortogonálního doplňku.

Řešení. Hledaná báze obsahuje jediný vektor. Je jím nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$(3, -7, 1, -5, 9).$$

$\square$

Příklad 18. *Popište ortogonální doplněk podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li V generován vektory* $(-1, 2, 0, 1)$, $(3, 1, -2, 4)$, $(-4, 1, 2, -4)$, $(2, 3, -2, 5)$.

Řešení. Ortogonální doplněk (komplement) $V^\perp$ je množina všech skalárních násobků vektoru $(4, 2, 7, 0)$. $\square$

Příklad 19. *V prostoru $\mathbb{R}^5$ určete ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru W, jestliže*

(a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t);\ r, s, t \in \mathbb{R}\}$;

(b) W je množina řešení soustavy rovnic $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$.

Řešení. Platí

(a) $W^\perp = \langle\, (1, 0, -1, 1, 0), (1, 3, 2, 1, -3)\,\rangle$;

(b) $W^\perp = \langle\, (1, 0, -1, 0, 0), (1, -1, 1, -1, 1)\,\rangle$.

$\square$

Příklad 20. *Nechť jsou v prostoru $\mathbb{R}^4$ dány vektory*

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého $\mathbb{R}^4$. (Můžete k tomu využít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.)

Řešení. Hledaných doplnění je pochopitelně nekonečně mnoho. Jedním (skutečně jednoduchým) je např.

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (1, 0, 0, -1), \quad (1, 0, -1, 1).$$

$\square$

Příklad 21. *Je množina* $V = \{(1, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ *s operacemi*

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (1, y) \oplus (1, z) = (1, z + y) \quad \textit{pro všechna } y, z \in \mathbb{R},$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad z \odot (1, y) = (1, y \cdot z) \quad \textit{pro všechna } y, z \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem?

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. □

Příklad 22. *Pro jaké hodnoty parametrů* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *jsou vektory* $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ *lineárně závislé?*

Řešení. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \qquad a = c = 1, \qquad b = c = 1.$$

□

Příklad 23. *Nechť je dán vektorový prostor* V *a nějaká jeho báze složená z vektorů* u, v, w, z. *Zjistěte, zda jsou vektory*

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

Řešení. Vektory jsou lineárně nezávislé. □

Příklad 24. *Doplňte vektory* $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ *na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše* 3.

Řešení. Stačí připojit např. polynom x. □

Příklad 25. *Tvoří matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je tzv. regulární (tj. její hodnost je rovna rozměru; tj. lze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržet jednotkovou matici; tj. existuje k ní matice inverzní; tj. má nenulový determinant, roven 116; tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; tj. toto zobrazení je injektivní). □