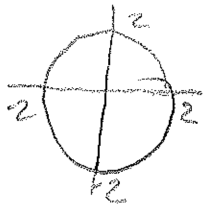
(98) $f(x,y)=(2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ na $M: x^2+y^2 \le 4$




$$f'_x=\left[4x+(2x^2+3y^2)(-2x)\right]e^{-(x^2+y^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2-2)=0$$

$$f'_y=\left[6y+(2x^2+3y^2)(-2y)\right]e^{-(x^2+y^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2-3)=0$$

Soustava pro stacionární body

$$(1)\quad -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2-2)=0$$

$$(2)\quad -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2-3)=0$$

- Je-li $x=0$ (z 1 rce) pak do 2. dosadím

$$-2ye^{-(-y^2)}(0+3y^2-3)=0$$

$$-2ye^{+y^2}(3y^2-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow A_1=[0,0] \\ 3y^2-3=0 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow A_{2,3}=[0,\pm 1] \end{cases}$$

- Je-li $y=0$ (z 2. rce) pak do 1. dosadím

$$-2xe^{-x^2}(2x^2+0-2)=0$$

$$-2xe^{-x^2}(2x^2-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad A_1=[0,0] \text{ (ten už tu máme)} \\ 2x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow A_{4,5}=[\pm 1,0] \end{cases}$$

- $\left.\begin{array}{l} 2x^2+3y^2-2=0 \\ 2x^2+3y^2-3=0 \end{array}\right\} \ominus$

$1=0 \Rightarrow$ nemá řešení!

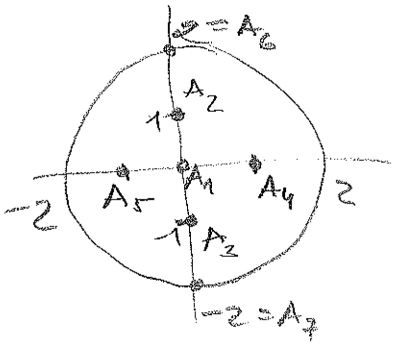
pokr. (P)

FUNKČNÍ HODNOTY

minimum $A_1 = [0,0]$ ... $f(A_1) = 0$

maximum $A_{2,3} = [0, \pm 1]$ $f(A_2) = f(A_3) = \frac{3}{e}$

$A_{4,5} = [\pm 1, 0]$ $f(A_4) = f(A_5) = \frac{2}{e}$




HRANICE M: kružnice – prozkoumat obě půlkruhy

(i) horní půlkružnice $x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - x^2$ $\quad x \in \langle -2, 2 \rangle$ !

$y = \sqrt{4 - x^2}$

dosazení: $e^{-(x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2)}(2x^2 + 3\sqrt{4-x^2}^2) = f(x, \sqrt{4-x^2})$

$= e^{-(x^2+4-x^2)}(2x^2 + 12 - 3x^2) =$

$= e^{-4}(12 - x^2)$

Stac. body na hranici:

$f'(x, \sqrt{4-x^2}) = e^{-4}(-2x) = -2x e^{-4}$

$-2xe^{-4} = 0 \iff x = 0$

přepomínka $y = \sqrt{4-x^2}$

$y = \sqrt{4-0} = 2$

$A_6 = [0, 2]$ $\quad f(A_6) = e^{-4} \cdot 12 = \frac{12}{e^4}$

(ii) dolní půlkružnice $y = -\sqrt{4-x^2}$ $\quad x \in \langle -2, 2 \rangle$

dosazení $e^{-(x^2 + (-\sqrt{4-x^2})^2)}(2x^2 + 3(-\sqrt{4-x^2})^2 = f(x, -\sqrt{4-x^2})$

$= e^{-4}(12 - x^2)$

Sta body $f'(x, -\sqrt{4-x^2}) = -2xe^{-4}$

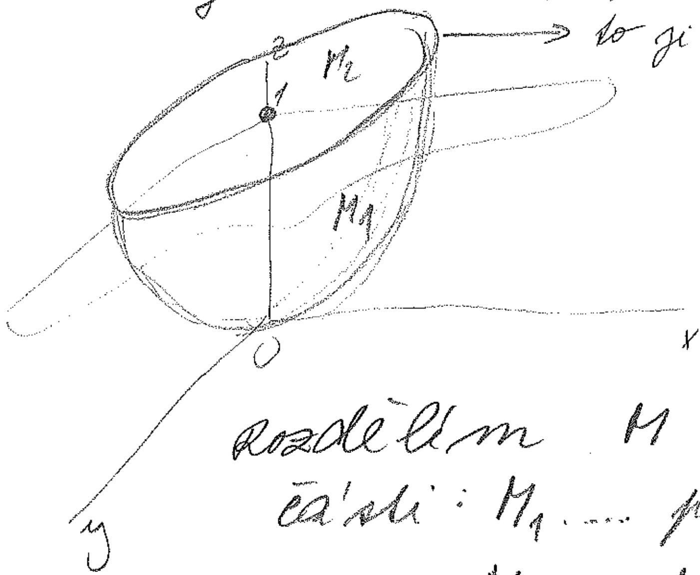
$-2xe^{-4} = 0 \iff x = 0$

$y = -\sqrt{4-0} = -2$

$A_7 = [0, -2]$ $\quad f(A_7) = e^{-4} \cdot 12 = \frac{12}{e^4}$

(104) $f(x,y,z) = x+2y+3z$ na $M: x^2+y^2 \leq z \leq 1$

M je část paraboloidu,
který má vrchol v $[0,0,0]$
a je ohraničen rovinou $z=1$




→ to je kružnice v
rovině $z=1$
má poloměr 1
a střed v $[0,0,1]$

Rozdělím M na dvě
části: $M_1$ ..... paraboloid $x^2+y^2=z$ kde $z<1$
$M_2$ ... kruh $x^2+y^2 \leq 1$

- Stacionární body

$f_x = 1$

$f_y = 2$

$f_z = 3$

$A_1 = [1,2,3] \notin$ do té množiny
co je na obrázku,
takže to bude někde
na hranici

**HRANICE:**

$M_1: z = x^2+y^2 \quad , z \leq 1$ (dosadíme)

$f(x,y,x^2+y^2) = x+2y+3x^2+3y^2$

teď už je to fce 2 proměnných, to už umíme :-)

$f'_x(x,y,x^2+y^2) = 1+6x$

$f'_y(x,y,x^2+y^2) = 2+6y$

$1+6x=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$ $\quad A_2 = \left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}\right]$ $\quad f(A_2) = -\frac{5}{12}$

$2+6y=0 \quad\quad y = -\frac{1}{3}$

$z = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \leq 1$ (tedy $A_2 \in M_1$)

104 pokr.

$M_2$: kruh $x^2+y^2 \leq 1$ ~~$z = x^2+y^2$~~ $z=1$

$f(x,y,1) = x+2y+3$

$f'_x(x,y,1) = 1$

$f'_y(x,y,1) = 2$ $\Big\}$ $\notin$ v kruhu $\Rightarrow$ musím zkoumat hraniční kružnici $x^2+y^2=1$

hraniční kružnice se mi rozpadne na horní a dolní polokružnici:

$k_1$: $y = \sqrt{1-x^2}$

$k_2$ $y = -\sqrt{1-x^2}$

- $k_1$: (na horní půlkružnici) dosadím (nezapomenout, že jsem v $z=1$!)

$$f(x,\sqrt{1-x^2},1) = x+2\sqrt{1-x^2}+3$$

$$f'(x,\sqrt{1-x^2},1) = 1+2\cdot\frac{1\,(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = 1-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{+2x}{\sqrt{1-x^2}} = +1$$

$$2x = \sqrt{1-x^2} \quad \Big|^2$$

$$4x^2 = 1-x^2$$

$$5x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y_1 = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $z=1$

$A_3 = \left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right]$

Protože jsem v řešení umocňovala, musím dělat zkoušku, $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ tedy není řešením!

10 pokr.

$$f(A_3) = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + 3 = \underline{\sqrt{5} + 3}$$

• $k_2$ (dolní půlkružnice) $\quad y = -\sqrt{1-x^2}$

$$f(x, -\sqrt{1-x^2}, 1) = x - 2\sqrt{1-x^2} + 3$$

$$f'(x, -\sqrt{1-x^2}, 1) = 1 - 2\frac{1(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = -1 \quad |^2$$

$$4x^2 = 1 - x^2$$

$$5x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Opět jsem umocňovala, musím zase dělat zkoušku! Tedy $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ není řešením

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y_2 = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_4 = \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right]$$

$$f(A_4) = -\frac{\sqrt{5}}{5} - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + 3 = 3 - \frac{5\sqrt{5}}{5} = \underline{3 - \sqrt{5}}$$

Závěr: <u>maximum</u> $\quad A_3 = \left[\frac{\sqrt{5}}{5}, +\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right]$

$$f(A_3) = \sqrt{5} + 3$$

<u>minimum</u> $\quad A_2 = \left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}\right]$

$$f(A_2) = -\frac{5}{12}$$

(114) $\int_3^4 \left( \int_x^{2x} \frac{1}{x^2-3x+2} \, dy \right) dx =$

$$= \int_3^4 \left[ \frac{y}{x^2-3x+2} \right]_x^{2x} dx = \int_3^4 \frac{2x}{x^2-3x+2} - \frac{x}{x^2-3x+2} \, dx =$$

$$= \int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2} \, dx = *$$

Rozklad na par. zlomky $\quad x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$x = A(x-1)+B(x-2)$$
$$x = Ax - A + Bx - 2B$$

$$\left.\begin{aligned} x^0: &\quad -A-2B=0 \\ x^1: &\quad A+B=1 \end{aligned}\right\} (+)$$

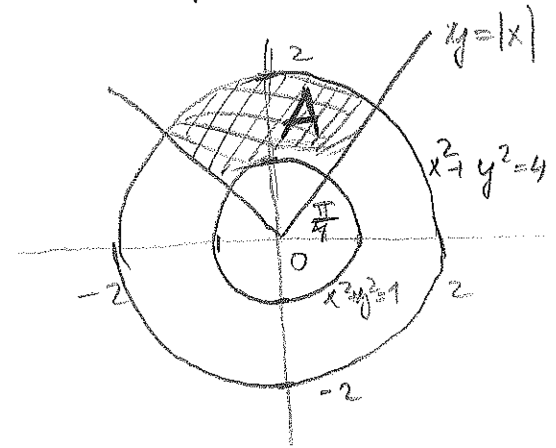
$$-B = 1$$
$$\underline{B=-1} \Rightarrow A-1=1 \Rightarrow \underline{A=2}$$

$$* = \int_3^4 \frac{2}{x-2} + \frac{(-1)}{x-1} \, dx = \Big[ 2\ln|x-2| + (-1)\ln|x-1| \Big]_3^4 =$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3 - (2\ln 1 - \ln 2) =$$
$$= \boxed{2\ln 2 - \ln 3}$$

(128) $\iint_A 2(x^2+y^2)\, dA \qquad A: 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad y \ge |x|$

Převedeme do polárních se středem v [0,0]




omezení $1 \le r \le 2$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$ (podívejte se pořádně na množinu A na obrázku!)

jakobián

$$\int_1^2 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r \cdot 2r^2 \, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_1^2 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2r^3 \, d\varphi \right) dr = \int_1^2 \left[ 2\varphi r^3 \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr =$$

$$= \int_1^2 \frac{3\pi}{2} r^3 - \frac{\pi}{2} r^3 \, dr = \int_1^2 \pi r^3 \, dr =$$

$$= \left[ \frac{\pi r^4}{4} \right]_1^2 = \underbrace{\pi \frac{16}{4}}_{4\pi} - \pi \frac{1}{4} = \frac{15}{4}\pi$$

POZOR! buď se já nemusím dopočítat, nebo je chyba ve výsledcích ze cvičení!

$x = r\cos\varphi$

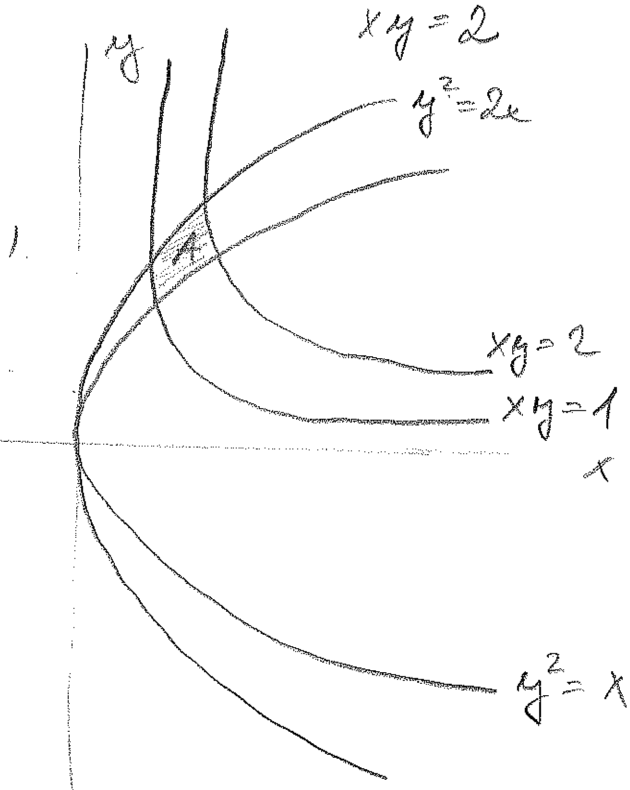
$y = r\sin\varphi$

$x^2+y^2=r^2$

(127) $I=\iint\limits_A \sqrt{xy}\,dx\,dy$

$A: \; y^2=x, \quad y^2=2x, \quad xy=1, \quad xy=2$

nekreslím druhé větve hyperbol, protože je nepotřebuju, ale nezapomínejte, že existují :-)




TRANF: $u = xy$

$v=\dfrac{y^2}{x}$

MEZE: $\underbrace{xy=1,\; xy=2}_{u} \Rightarrow \underline{1\le u\le 2}$

$y^2=2x,\; y^2=x \Rightarrow \underbrace{2=\dfrac{y^2}{x},\; 1=\dfrac{y^2}{x}}_{v} \Rightarrow \underline{1\le v\le 2}$

Pokračuju podle nápovědy udělám $\det G^{-1}$

$G^{-1}=\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{pmatrix}$

$u_x = y \quad u_y = x$

$v_x = \dfrac{-y^2}{x^2} \quad v_y=\dfrac{2y}{x}$

$$|G^{-1}| = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} - \left(-\frac{y^2}{x}\right) = \frac{3y^2}{x}$$

ale já potřebuju $|G|$ !

Protože abych mohla integrovat v nových proměnných tak hledám tvar $\int\limits_{u}^{u}\int\limits_{v}^{v} |G|\, f(u,v)\,du\,dv$

Platí, že $\quad G \cdot G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\det G) \cdot (\det G^{-1}) = 1$$

$$\det G \cdot \left(\frac{3y^2}{x}\right) = 1$$

$$\det G = \frac{1}{3 \cdot \frac{y^2}{x}} \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{x} = v}$$

$$\det G = \frac{1}{3v}$$

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \left(f(u,v)\right) du\, dv = *$$

uvědomme si, že $\quad f(x,y) = \sqrt{xy}$

a víme, že $\quad u = xy$

$$\Rightarrow f(u,v) = \sqrt{u}$$

$$* = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v} \sqrt{u}\, du\, dv =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3v} \left[\frac{\sqrt{u^3}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 dv = \int_1^2 \frac{1}{3v} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) dv =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{4\sqrt{2} - 2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3v}\, dv =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{4\sqrt{2} - 2}{9}\right) \cdot \frac{1}{v}\, dv =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2}{9} \cdot \left[\ln v\right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2} - 2}{9} (\ln 2 - \ln 1) =$$

$$= \underline{\frac{4\sqrt{2} - 2}{9} \ln 2}$$

GL & HF... Lenka :-)