Teorie grafů

MB103 - podzim 2010

Cvičení 6

Pojmy k zopakování:

- Vytvořující funkce dané posloupnosti
- Operace s vytvořujícími funkcemi
- Zobecněná binomická věta
- Lineární rekurence
- Catalanova čísla
- Fibonacciho čísla

Příklad 1. Určete vytvořující funkce následujících posloupností

1. $(1; 2; 1; 4; 1; 8; 1; 16; \dots)$
2. $(1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; \dots)$
3. $(1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; \dots)$

Výsledek. 1. $\frac{1}{1-x^2} + \frac{2x}{1-2x^2}$

2. $\frac{1+x}{1-x^3}$

3. $\frac{-1}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2}$

Řešení. 1. $(1; 2; 1; 4; 1; 8; 1; 16; \dots) = (1; 0; 1; 0; \dots) + (0; 2; 0; 4; 0; 16; \dots)$. Určíme tedy vytvořující funkce jednotlivých posloupností. První dostaneme z posloupnosti $(1, 1, 1, 1, 1)$. Její vytvořující funkce je $\frac{1}{1-x}$. Nuly vnoříme nahrazením x^2 za x. Podobně druhou vytvořující funkci dostaneme z posloupnosti $(1; 2; 4; 8; 16; \dots)$. Nejprve vynásobíme dvěma, vložíme nuly a pak vynásobením x dostaneme nulu na začátku.

2. $(1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; \dots) = (1; 0; 0; 1; 0; 0; 1 \dots) + (0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1 \dots)$.

Příklad 2. Určete koeficient u x^{17} v $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^3$

Výsledek. 45

Řešení. $(x^3 + x^4 + x^5 + ...)^3 = \frac{x^9}{(1-x)^3} = x^9 \cdot \frac{1}{(1-x)^3}$. Zajímá nás tedy koeficient u x^8 v $\frac{1}{(1-x)^3}$. Ten je roven $\binom{10}{2}$, tedy 45.

Příklad 3. V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků (míčky téže barvy jsou nerozpoznatelné). Kolik je různých možností, jak z takovéto krabice vybrat soubor 70 míčků?

Výsledek. $\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2}$

Řešení. Počet možností je zřejmě roven koeficientu u x^{70} v

$$(1 + x + \cdot + x^{30})(1 + x + \cdot + x^{40})(1 + x + \cdot + x^{50}).$$

Když upravíme, dostáváme, že

$$(1+x+\cdots+x^{30})(1+x+\cdots+x^{40})(1+x+\cdots+x^{50}) = \frac{1}{(1-x)^3} \ldots (1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}).$$

Řešení pak dostáváme ze zoběcněné binomické věty.

Příklad 4. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?

Nápověda: Vyjádřete počet všech možností, kdy padne součet 30. Uvažujte $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12}$.

Výsledek. $\binom{29}{11} - 12 \cdot \binom{23}{11} + 66 \cdot \binom{17}{11} - 220 \cdot \binom{11}{11}$

Řešení. Výsledná pravděpodobnost bude podílem počtů příznivých a všech možností. Počet všech možností je 6^{12}. Spočítejme nyní počet příznivých možností. Uvažujme výraz $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12}$. Počet příznivých možností je potom koeficient u x^{30}. Upravujme:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12} = \left(\frac{x(1-x^6)}{1-x}\right)^{12} = x^{12} \cdot \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12}$$

Zajímá nás tedy koeficient u x^{18} u

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{12} = (1 - 12x^6 + 66x^{12} - 220x^{18}) \cdot \frac{1}{1-x}^{12}.$$

Ze zobecněné binomické věty pak dostáváme počet příznivých možností

$$\binom{29}{11} - 12 \cdot \binom{23}{11} + 66 \cdot \binom{17}{11} - 220 \cdot \binom{11}{11}.$$

Příklad 5. Sadař má vysadit 25 nových stromků, přičemž má k dispozici pouze 4 druhy. Sadařova manželka si však klade omezující podmínky: nejvýše jeden ořešák, nejvýše 10 jabloní, alespoň 6 třešní a alespoň 8 slivoní Kolik existuje různých způsobů výběru druhů stromů?

Nápověda: Zajímá nás koeficient u x^{25} *v*

$$(1 + x)(1 + x + \cdots + x^{10})(x^6 + x^7 + \ldots)(x^8 + x^9 + \ldots).$$

Výsledek. $\binom{14}{3} - \binom{12}{3} - \binom{3}{3}$.

Řešení.

$$(1+x)(1+x+\dots+x^{10})(x^6+x^7+\dots)(x^8+x^9+\dots) = \frac{x^{14}(1-x^2)(1-x^{11})}{(1-x)^4}.$$

Tedy nás zajímá koeficient u x^{11} ve $(1-x^2-x^{11}\dots)\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$.

Příklad 6. Vyjádřete obecný člen posloupností určených následujícími rekurencemi:

1. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ pro $n = 1, 2, 3 \dots$.
2. $a_0 = 0$,$a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ pro $n = 0, 1, 2, 3 \dots$.

Řešení.

1. $a_n = 2 + 3^{n-1}$.
2. $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{-3}\cdot((1+\sqrt{-3})^n - (1-\sqrt{-3})^n)$.

Příklad 7. Řešte rekurenci, kde v posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je následující člen aritmetickým průměrem předchozích dvou.

Výsledek. $a_n = k\left(-\frac{1}{2}\right)^n + l$.

Příklad 8. Řešte rekurenci $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 2, a_1 = 8$.
Nápověda: Utvořte novou posloupnost $b_n = \log_2 a_n$.

Příklad 9. Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.
Nápověda: Vyberme libovolnou úhlopříčku jdoucí pevným vrcholem. Ta nám mnohoúhelnk rozdělí na dva.

Výsledek. $t_n = C_{n-2}$, kde C_n značí Catalanovo číslo.

Příklad 10. Určete počet procházek ve čtvercové síti o rozměrech $n \times n$ z levého dolního rohu A do pravého horního rohu B, které vedou pouze doprava a nahoru takových, že mají právě jeden bod na diagonále AB (nepočítaje A a B).
Nápověda: Catalanova čísla.

Příklad 11. Dokažte, že pro Fibonacciho čísla platí:

1. $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
2. $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Příklad 12. Označme H_n minimální počet kroků potřebných k přemístění věže o n kotoučích z jednoho kolíku na druhý u hlavolamu Hanojská věž. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet H_n a určet její obecné řešení.

Výsledek. $H_{n+1} = 2H_n + 1$, $H_n = 2^{n-1}$