Matematika III, 2. cvičení

Limity funkcí více proměnných

Pro počítání limit $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ nemáme k dispozici žádnou analogii L'Hospitalova pravidla, musíme tedy používat různé úpravy. Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných spočívá v odlišnosti okolí limitního bodu: u funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (pak má funkce limitu v bodě, pokud existují obě jednostranné limity, které se rovnají), ale u funkce dvou a více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby (po přímkách, parabolách, ...). Existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě neexistuje. V následujících příkladech vypočítejte limity, případně dokažte, že neexistují.

Nápověda. Pokud po dosazení limitních bodů nevyjde neurčitý výraz, můžeme tyto limitní body dosadit. Pokud vyjde neurčitý výraz, můžeme zkoušet různé postupy:

(1) rozložit čitatel nebo jmenovatel na součin podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(2) rozšířit čitatel i jmenovatel něčím vhodným podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(3) $\frac{\text{ohraničený výraz}}{\infty} = 0, 0 \cdot (\text{ohraničený výraz}) = 0$;

(4) použít vhodnou substituci, po které bychom dostali limitu jedné proměnné;

(5) převést limitu dvou proměnných do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi$$

(je-li v limitě výraz $x^2 + y^2$, polární souřadnice většinou fungují, protože pak dostaneme jednodušší výraz $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$, který nezávisí na φ);

(6) zvolit $y = kx$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po přímkách, v případě jiného limitního bodu je potřeba drobná úprava, aby přímky limitním bodem procházely), $y = kx^2$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, v případě jiného limitního bodu je opět potřeba drobná úprava), případně jinak vhodně parametricky nahradit $x = f(k)$ a $y = g(k)$, a pokud bude hodnota limity záviset na parametru k, limita neexistuje; tento postup lze použít pouze k důkazu neexistence limity, nikoliv k výpočtu její hodnoty za předpokladu, že existuje!

Příklad 14. $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$

Výsledek. 2.

Příklad 15. $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Nápověda. Rozložte jmenovatel na součin podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

Příklad 16. $\lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$

Nápověda. Použijte postup (3).

Výsledek. 0.

Příklad 17. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

Nápověda. Rozšiřte zlomek výrazem $\frac{y}{y}$ a použijte substituci $t = xy$ (protože $(x, y) \to (0, 2)$, bude $t \to 0$).

Výsledek. 2.

Příklad 18. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ a protože $(x, y) \to (\infty, \infty)$, bude $r \to \infty, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Výsledek. 0.

Příklad 19. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Nápověda. Zvolte dvě různé parametrizace, první bude $y = 1 - e^x$, druhá bude $y = x$.

Výsledek. Pro první parametrizaci vyjde hodnota limity -4, pro druhou vyjde 0, takže limita neexistuje.

Příklad 20. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic, kde $r \to 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Výsledek. $\cos 2\varphi$, záleží tedy na tom, odkud se k bodu $[0, 0]$ blížíme, tudíž limita neexistuje.

Příklad 21. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (\frac{2xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic, kde $r \to \infty, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Výsledek. 1 pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ale pro $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$ vyjde 0, takže limita neexistuje.

Příklad 22. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Výsledek. $\sqrt{2}$.

Příklad 23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Výsledek. 2.

Příklad 24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}$

Výsledek. 0.

Příklad 25. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$

Výsledek. 0.

Příklad 26. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Výsledek. 0.

Příklad 27. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

Výsledek. 0.

Příklad 28. $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$

Výsledek. e.

Příklad 29. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

Výsledek. Neexistuje.

Příklad 30. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$

Výsledek. Neexistuje.

Příklad 31. *Dokažte, že* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-y}{x^2-y}$ *neexistuje.*

Nápověda. Zvolte $y = kx^2$, tedy k bodu $[0,0]$ se budeme blížit po parabolách.

Příklad 32. *Pomocí svazku přímek procházejících limitním bodem dokažte, že následující limita neexistuje:*

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)}\frac{2x+xy-y-2}{x^2+y^2-2x+4y+5}.$$

Nápověda. Přímky ze svazku mají rovnice $y = kx + q$, vyjádřete q v závislosti na k tak, aby odpovídající přímky procházely bodem $[1,-2]$.

Výsledek. Limita vyjde rovna $\frac{k}{1+k^2}$, což závisí na k, limita je tedy závislá na směru, ze kterého se blížíme k limitnímu bodu, takže limita neexistuje.

Spojitost funkcí více proměnných

Funkce je spojitá v bodech, ve kterých má vlastní limitu (tj. limita existuje a je různá od $\pm\infty$), která je rovna funkční hodnotě.

Příklad 33. *Určete body, v nichž není spojitá funkce* $f(x,y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$.

Výsledek. Kružnice $k([0,0];1)$.

Příklad 34. *Určete body, v nichž není spojitá funkce* $f(x,y) = \frac{\sin(x^2y+xy^2)}{\cos(x-y)}$.

Výsledek. Množina bodů $\{[x, x+(2k+1)\frac{\pi}{2}]; x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 35. *Určete body, v nichž není spojitá funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \textit{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \textit{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Výsledek. Funkce je všude spojitá, včetně bodu $[0,0]$.