Matematika III, 11. cvičení

Pojmy k zopakování

- Stromy, pěstěné stromy
- Kód pěstěného stromu
- Kostra grafu, minimální kostra
- Kruskalův algoritmus, Jarníkův-Primův algoritmus, Borůvkův algoritmus
- N-rozměrná krychle a důkaz matematickou indukcí

Příklad 217. *Určete všechny stromy*

1. *na čtyřech vrcholech.*
2. *na šesti vrcholech.*

Výsledek. V prvním případě jsou 2, ve druhém jich je 6.

Příklad 218. *Dokažte, že graf G je strom právě tehdy, když je souvislý a odebráním libovolné hrany dostaneme nesouvislý graf.*

Příklad 219. *Dokažte, že graf G je strom právě tehdy, když libovolné dva vrcholy můžeme spojit právě jednou cestou.*

Příklad 220. *Určete všechny úplné bipartitní grafy, které jsou stromy.*

Výsledek. $K_{1,n}$

Příklad 221. *Uveďte příklad grafu se dvěma kružnicemi, ze kterého lze odebráním jedné hrany dostat strom.*

Výsledek. Neexistuje.

Příklad 222. *Nechť strom G obsahuje alespoň jeden vrchol stupně k. Dokažte, že potom G obsahuje alespoň k vrcholů stupně 1.*

Příklad 223. *Jaký je maximální počet vrcholů binárního stromu o h hladinách? A jaký je maximální počet vrcholů k-árního stromu o h hladinách?*

Výsledek. $2^h - 1$, $\frac{k^h-1}{k-1}$

Příklad 224. *Dokažte, že každý strom na $n > 1$ vrcholech je bipartitní graf.*

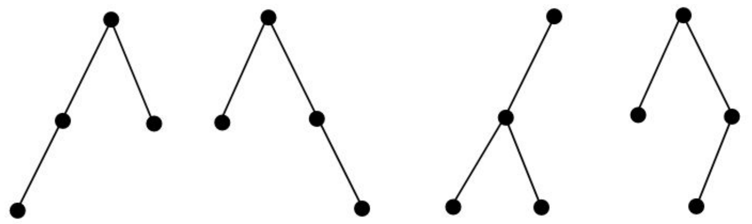
Příklad 225. *Dokažte, že každý alkan je strom.*
Nápověda: Alkany jsou tvaru C_nH_{2n+2}, dále využijte Eulerův vzorec.

Příklad 226. *Nakreslete pěstěný strom s následujícím kódem* 0000101101011010001010111 1.

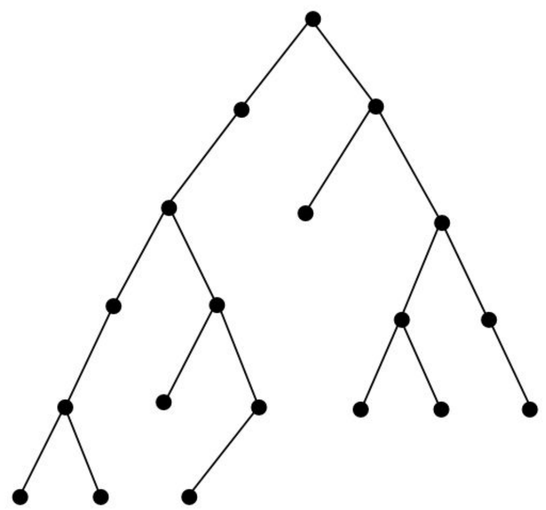
Příklad 227. *Rozhodněte, zda existují stromy s následujícími kódy. V případě, že ano, potom daný strom nakreslete.*

1. 00011001111001
2. 000010100111010110010111

Příklad 228. *Určete kódy následujících pěstěných stromů*

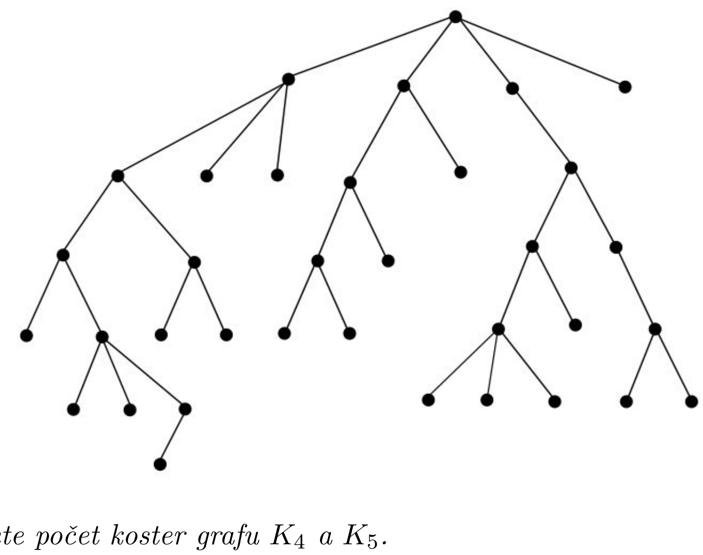


Příklad 229. *Určete kód tohoto pěstěného stromu*



Výsledek. 00000010111001001111100100010110011111

Příklad 230. *Určete kód tohoto pěstěného stromu*



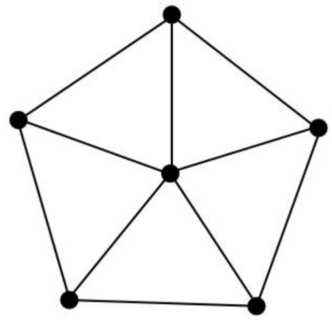
Příklad 231. *Určete počet koster grafu K_4 a K_5.*

Výsledek. $16, 125$

Příklad 232. *Určete počet koster grafu C_{2010}.*

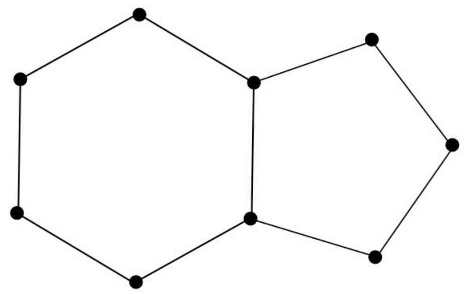
Výsledek. 2010

Příklad 233. *Určete počet koster grafu*



Výsledek. 25

Příklad 234. *Určete počet koster grafu*



Výsledek. 29

Příklad 235. *Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, aby obsahoval dvě hranově disjunktní kostry?*

Výsledek. 4

Příklad 236. *Uveďte příklad grafu, který má právě 5 koster.*

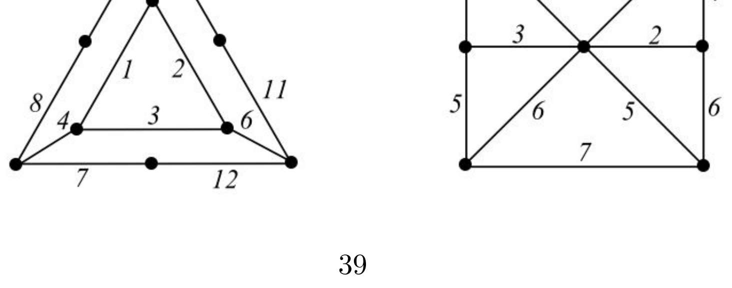
Výsledek. C_5

Příklad 237. *Uveďte příklad grafu, který má právě 2010 koster a neobsahuje kružnici* C_{2010}.
Nápověda: Rozložte číslo 2010 na součin dvou čísel.

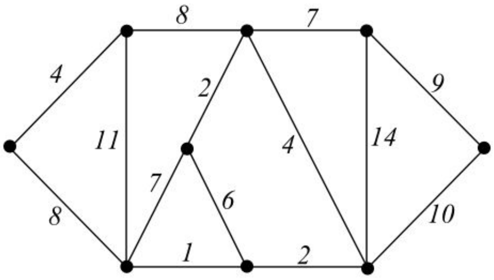
Příklad 238. *Uveďte příklad grafu, který má právě 2011 koster a neobsahuje kružnici* C_{2011}.
Nápověda: 2011 je prvočíslo, hledejte nějaké řešení rovnice $m \cdot n + m + n = 2011$.

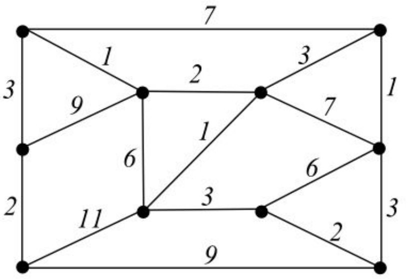
Příklad 239. *Najděte ohodnocený graf, který má jednoznačně určenou minimální kostru, ale jeho hrany nemají vzájemně různá ohodnocení.*

Příklad 240. *Pomocí Kruskalova algoritmu najděte minimální kostry následujících grafů a určete, jestli jsou jednoznačně určené.*

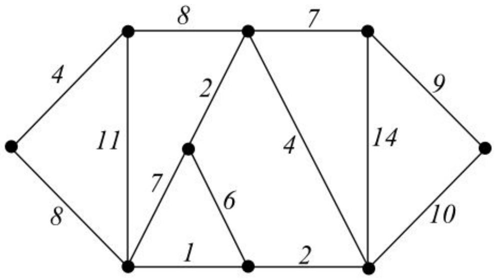


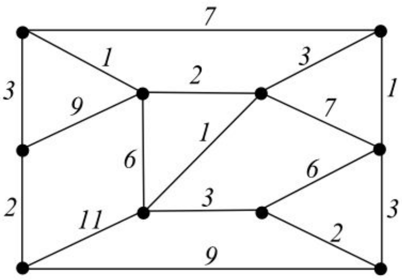
Příklad 241. *Pomocí Jarníkova-Primova algoritmu najděte minimální kostry následujících grafů.*





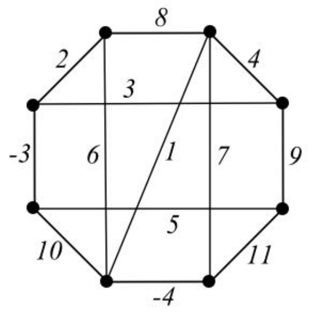
Příklad 242. *Pomocí Borůvkova algoritmu najděte minimální kostry následujících grafů.*

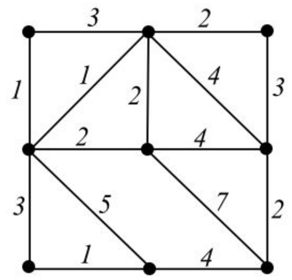




Příklad 243. *Najděte minimální kostry následujícího grafu*

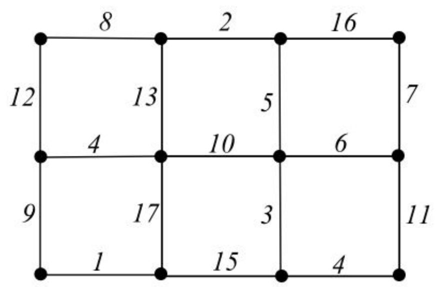
1. *Kruskalovým algoritmem*
2. *Jarníkovým-Primovým algoritmem*
3. *Borůvkovým algoritmem*





Příklad 244. *Najděte minimální kostry následujícího grafu*

1. *Kruskalovým algoritmem*
2. *Jarníkovým-Primovým algoritmem*
3. *Borůvkovým algoritmem*



Příklad 245. *U každého tvrzení rozhodněte, zda platí. Své tvrzení dokažte (případně uveďte protipříklad)*

1. *Pokud má ohodnocený graf na n vrcholech více než $n-1$ hran, tak nejdražší hrana grafu určitě nepatří do minimální kostry.*
2. *Nejlevnější hrana grafu G určitě patří do minimální kostry.*
3. *Pokud je nejlevnější hrana grafu G určena jednoznačně (ostatní hrany jsou dražší), tak musí být obsažena v každé minimální kostře.*
4. *Pokud nějaký cyklus v grafu G obsahuje pouze jednu nejlevnější hranu, tak tato hrana patří do minimální kostry.*
5. *Nejkratší cesta mezi dvěma vrcholy určitě patří do minimální kostry.*

Příklad 246. *Nechť G je neorientovaný ohodnocený graf, $H \subseteq G$ jeho podgraf a T minimální kostra G. Ukažte, že $T \cap H$ je obsaženo v nějaké minimální kostře H.*