Příklad 27. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0, 1)$.*

$$F(0,1) = [\sqrt{1}, 0] = [1,0]$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f, & \frac{\partial}{\partial y} f \\ \frac{\partial g}{\partial x}, & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$F'(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det F'(0,1) = -1 \neq 0$$

je regulární! $\Rightarrow$ F je prosté v okolí $[0,1]$

$$[F^{-1}]'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jacobián inv. zobr. F^{-1}

10 21-16:49

Příklad 28. *Spočítejte jacobián ~~funkce~~ zobrazení F, kter~~á~~é je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

$$F(x,y) = \left[\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right]$$

pro $x \neq 0$

$$F(0,y) = \left[|y|, \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(y)\right]$$

$$[x,y] \longleftrightarrow [r,\varphi]$$

$$F^{-1}(r,\varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) & \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

ošklivé! $\Rightarrow$ jinak: nejprve jacobián F^{-1} a pak podle věty vypočteme F'.

10 21-16:49

$$[F^{-1}]'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det (F^{-1})'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = \underline{\underline{r}}$$

$$\overset{\text{věta}}{\Longrightarrow} \det F'(x,y) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi & +r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r} \cdot \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

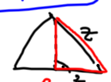
$$x = r \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

10 21-17:25

Příklad 29. *Drát délky l je rozdělen na 3 části. Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením, resp. složením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla* **maximální***, resp. minimální!*

$x \ldots$ kruh (poloměr)
$y \ldots$ čtverec (strana)
$z \ldots \triangle$ (strana)

$$\boxed{\begin{aligned} 2\pi x + 4y + 3z &= l \\ f(x,y,z) &= \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot z^2 \end{aligned}}$$



$$v^2 = z^2 - \frac{z^2}{4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot z$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot z = \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$$

10 21-16:49

I. Lagr. multiplikátory

Lagr. funkce: $L(x,y,z,\lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 - \lambda(2\pi x + 4y + 3z - l)$

stac. body:

$$L_x = 2\pi x - 2\lambda\pi = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$$
$$L_y = 2y - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow y = 2\lambda$$
$$L_z = \frac{\sqrt{3}}{2} z - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow z = 2\sqrt{3}\lambda$$
$$L_\lambda = (2\pi x + 4y + 3z - l) = 0$$

$$2\pi \cdot \lambda + 4 \cdot 2\lambda + 3 \cdot 2\sqrt{3}\lambda = l$$

$$\lambda(2\pi + 8 + 6\sqrt{3}) = l \Leftrightarrow \lambda = \frac{l}{2\pi + 8 + 6\sqrt{3}}$$

glob. min.

$$\boxed{[x,y,z] = \frac{l}{2\pi + 8 + 6\sqrt{3}} [1, 2, 2\sqrt{3}]}$$

hodnota: $\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 = \frac{l^2}{(2\pi + 8 + 6\sqrt{3})^2} \cdot (\pi + 4 + 3\sqrt{3}) = \boxed{\frac{l^2}{4(\pi + 4 + 3\sqrt{3})}}$

10 21-17:42

body na hranici:

a) $\underline{x = 0}$: $f(0,y,z) = y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$, když $4y + 3z = l$

$$z = \frac{l - 4y}{3}$$

$$f(0,y,z) = y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l - 4y}{3}\right)^2 = y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l^2 - 8ly + 16y^2}{9}\right) =$$

$$= y^2\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9} ly + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

stac. bod: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9} l = 0$

$$2y = \frac{2\sqrt{3}l}{9\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}l}{9 + 4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} l$$

$$\underline{\underline{y = \frac{l}{4 + 3\sqrt{3}}}}$$

10 21-17:51

$\Rightarrow$ hodnota: $3z = \ell - 4y$

$$3z = \ell - \frac{4\ell}{4+3\sqrt{3}} = \ell\left(\frac{3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)$$

$$z = \frac{\ell\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$$

$$f(x,y,z) = y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 = \frac{\ell^2}{(4+3\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{\ell^2 \cdot 3}{(4+3\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{\ell^2}{(4+3\sqrt{3})^2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7\ell^2}{4(4+3\sqrt{3})^2}$$

hranice: $y \in \langle 0, \frac{\ell}{4} \rangle$: $y=0$ $\boxed{\frac{\ell^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}$ $y = \frac{\ell}{4}$ $\frac{\ell^2}{16}$

analogicky pro $y=0$, resp. $z=0$.

spec. $y=0 \wedge z=0 \Rightarrow x = \frac{\ell}{2\pi}$

$f(x,0,0) = \pi x^2 = \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 = \ell^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$

10 21-18:01

Příklad 30. *Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí $y - x^3 - 2x - 1 = 0$. Případné extrémy určete. Uvažujte křivku omezenou na interval $x \in \langle 0, 5 \rangle$.*

$y = x^3 + 2x + 1$

$f(x,y) = f(x, x^3+2x+1) = x - 2(x^3+2x+1) =$

$= -2x^3 - 3x - 2 = g(x) \quad x \in \langle 0, 5 \rangle$

stac. bod: $g'(x) = -6x^2 - 3 = 0$ nemá řešení

$x=0$ $\quad g(0) = -2$ abs. max.

$x=5$ $\quad g(5) = -2\cdot 125 - 3\cdot 5 - 2 = -267$ abs. min.

10 21-16:49

Příklad 31. *Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ a $z = 1 + x + y$, které leží nejblíže počátku. Zdůvodněte, že jde skutečně o minimum.*

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(pozn. snáze se bude pracovat s funkcí $x^2+y^2+z^2$)

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2 - \lambda_1(x^2+y^2-z^2) - \lambda_2(z-x-y-1)$

10 21-16:50

Příklad 32. *Zjistěte, zda existují maxima a minima funkce $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ na elipse $z^2 = x^2 + y^2$, $x - y + z + 1 = 0$.*

Lagrange:

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 3z - \lambda_1(z^2 - x^2 - y^2) - \lambda_2(x - y + z + 1)$

$L_x = 1 + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$ $\qquad z^2 = x^2 + y^2$

$L_y = 2 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$ $\qquad x - y + z + 1 = 0$

$L_z = 3 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0$

$2\lambda_1 x = \lambda_2 - 1$

$2\lambda_1 y = -\lambda_2 - 2$

$2\lambda_1 z = -\lambda_2 + 3$

$\Rightarrow$ $\lambda_2 - 1 + \lambda_2 + 2 - \lambda_2 + 3 + 2\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 + 4 + 2\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2\lambda_1 - 4$

10 21-16:50

2. podm.: $4\lambda_1 x^2 + 4\lambda_1^2 y^2 = 4\lambda_1^2 z^2$

$(\lambda_2 - 1)^2 + (-\lambda_2 - 2)^2 = (-\lambda_2 + 3)^2$

$\lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 1 + \lambda_2^2 + 4\lambda_2 + 4 = \lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 9$

$\lambda_2^2 + 8\lambda_2 - 4 = 0$

$$\lambda_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64+16}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -4 + 2\sqrt{5} \\ -4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_2}{2} - 2 = \begin{cases} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{cases}$$

I. $-2\sqrt{5}x = -5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow -10x = -5\sqrt{5} + 10$

$x = \frac{5\sqrt{5}}{10} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$

$-2\sqrt{5}y = 2 - 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}y = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{5} + 1$

$-2\sqrt{5}z = 7 - 2\sqrt{5} \Rightarrow +10z = -7\sqrt{5} + 70 \Rightarrow z = 7 - \frac{7\sqrt{5}}{10}$

II analogicky

10 21-18:24

10 21-18:18