

Příklad 41. Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočítejte integrál $\iint_A \sqrt{xy} dx dy$, kde množina A je ohraničena křivkami

$y^2 = 2x, y^2 = x, xy = 1, xy = 2.$

$x^2 = 2, x^2 = 1$
 $1 \leq u \leq 2$
 $1 \leq v \leq 2$

$G = \{v, u\}$
 $v = \frac{y^2}{x}$
 $u = xy$

$\iint_A \sqrt{uv} \frac{1}{2uv} du dv =$
 $= \int_1^2 \int_1^2 \frac{\sqrt{uv}}{2uv} du dv =$
 $= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} \ln v \right]_1^2 dv = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 0) = \ln 2$

11 11-16:59

Příklad 42. Vypočítejte

- těžiště,
- momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám

tenké homogenní rovinné lichoběžníkové desky s vrcholy v bodech $[-1, 0], [2, 0], [2, 2], [0, 1]$.

Rěšení. Hustota $\rho(x, y) = 1$ pro libovolná x, y . Integrujeme přes množinu $A = \{ -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(x+4) \}$.

Dostaneme $M = \iint_A dA = \frac{9}{2}, T_x = \iint_A x \cdot 1 dA = \frac{9}{2}, T_y = \iint_A y \cdot 1 dA = \frac{9}{2}, J_x(A) = \iint_A y^2 dA = \frac{15}{2}, J_y(A) = \iint_A x^2 dA = \frac{31}{2}.$

$T_x = \frac{1}{M} \iint_A x \cdot \rho(x, y) dA = \frac{1}{\frac{9}{2}} \int_{-1}^2 \int_0^{\frac{1}{3}(x+4)} x dy dx = \frac{2}{9} \int_{-1}^2 x(x+4) dx = \frac{2}{9} \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{4}{2} + 8 - \frac{1}{2} - 4 \right) = \frac{9}{9} = 1$

$T_y = \frac{2}{9} \int_{-1}^2 \frac{1}{3} (x+4)^2 dx = \frac{2}{27} \int_{-1}^2 (x+4)^2 dx = \frac{2}{27} \left[\frac{1}{3} (x+4)^3 \right]_{-1}^2 = \frac{2}{81} (27 - 27) = 0$

11 11-16:54

$J_x = \iint_A y^2 dx dy = \int_{-1}^2 \int_0^{\frac{1}{3}(x+4)} y^2 dy dx =$
 $= \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \left[y^3 \right]_0^{\frac{1}{3}(x+4)} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \frac{1}{27} (x+4)^3 dx =$
 $= \frac{1}{81} \left[\frac{(x+4)^4}{4} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{81} \left(\frac{6^4}{4} - \frac{3^4}{4} \right) =$
 $= \frac{1}{81} \left(\frac{1296}{4} - \frac{81}{4} \right) = \frac{1115}{324}$

$J_y = \iint_A x^2 dx dy = \dots = \frac{29}{4}$

11 11-17:21

Příklad 43. Hodnotu integrálu

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 \approx 0,785398$$

odhadněte pomocí

- obdélníkového pravidla,
- lichoběžníkového pravidla
- Simpsonova pravidla,

přičemž zadaný interval rozdělte na 3 intervaly téže délky. Dosažené výsledky porovnejte s přesnou hodnotou a pomocí obrázku zdůvodněte míru nepřesnosti jednotlivých pravidel.

(a)

11 11-16:54

$I_2 = \int_0^1 f(x) dx$

$I_2 = \frac{1}{6} (f(0) + 2f(\frac{1}{3}) + 2f(\frac{2}{3}) + f(1)) =$
 $= \frac{1}{6} (1 + 2 \cdot \frac{9}{10} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 1) = 0,780769$

$I_3 = \frac{1}{36} (f(0) + 4f(\frac{1}{3}) + 2f(\frac{2}{3}) + 4f(\frac{2}{3}) + f(1)) =$
 $= \frac{1}{36} (1 + 4 \cdot \frac{9}{10} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} + 1) = 0,7853978$

11 11-17:33

Příklad 44. Pomocí matice sousednosti určete počet sledů délky 4 z vrcholu 0 do vrcholu 1 v následujícím grafu:

$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A^4)_{01} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 14$

11 11-16:54

Příklad 45. Ověřte, zda daná posloupnost je skóre nějakého grafu.
Pokud ano, nějaký graf s tímto skóre nakreslete.

(a) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
(b) (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5).

(d_1, d_2, \dots, d_n)
 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$
je grafové! \Leftrightarrow

ad a)
 $1+2+\dots+9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$
 $2+4+5 \Rightarrow$ není skóre!
ad b)
 $1+1+\dots+5 = 24$
(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5) ~~(1, 5)~~
(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4) ~~(1, 5)~~
(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) ~~(1, 5)~~
(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)

11 11-16:55

2 možnosti neizomorfního grafu!
přidáním vrcholů d. 5 dají možnosti!

11 11-17:59

Příklad 46. V grafu na obrázku najděte všechny mosty a artikule.
most \rightarrow hrana, jejíž odstranění zvýší počet komponent
artikule \rightarrow vrchol, jehož odstranění \rightarrow ...

11 11-16:55

Příklad 47. Udejte příklad grafu, který obsahuje právě

(a) 8 artikulací a 5 mostů,
(b) 3 artikule a 0 mostů,
(c) 2 artikule a 11 mostů.

a)

11 11-16:55

b)

c)

11 11-18:10

Příklad 48. Rozhodněte, zda jsou zobrazené grafy (trichord) 2-kovci.

11 11-16:56

Příklad 49. Užiňte Dijkstrův algoritmus k nalezení nejkratších cest z vyznačeného vrcholu do všech ostatních vrcholů.

a
b
c
d
e
f
g
h
i
j

strom nejkratších cest z vrcholu a

```

    graph LR
      a --> b
      a --> e
      b --> c
      b --> d
      e --> f
      e --> g
      c --> h
      c --> i
      d --> j
    
```

11 11-16:56

Příklad 50. Udejte příklad

(a) grafu s alespoň 4 vrcholy, který neobsahuje cyklus záporné délky a na němž dá Dijkstrův algoritmus chybný výsledek.

(b) grafu s alespoň 4 vrcholy, který obsahuje (alespoň jednu) nezápornou hranu a přesto na něm dá Dijkstrův algoritmus správný výsledek.

chybný výsledek

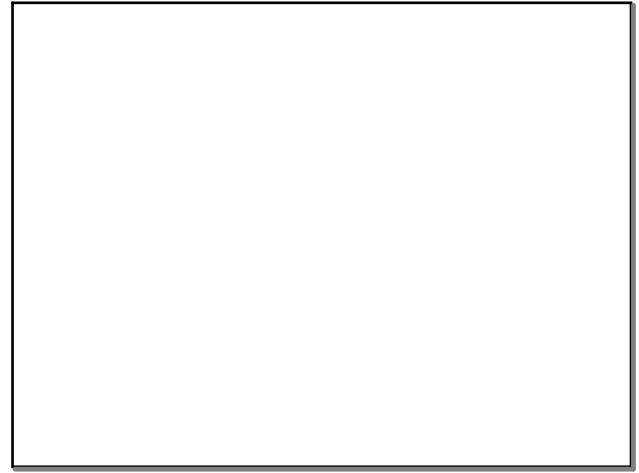
11 11-16:57

Příklad 51. Užiňte Bellman-Fordův algoritmus k nalezení nejkratších cest z vyznačeného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Hrany procházejte v pořadí dle počátečního (příp. koncového) vrcholu zprava doleva a shora dolů. Změňte ohodnocení hrany z 18 na -18, algoritmus provede s tímto novým grafem a ukažte, jak se detekují záporné cykly.

W-1 relaxuje všechny hrany

po 1. cyklu
po 2. cyklu
po 3. cyklu
STOP

11 11-16:57



nejpozději po m-tém přechodu detekuje záp. cyklus!

11 11-18:37

Příklad 52. Uveďte Floydův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Uveďte, jak se v průběhu výpočtu detekují cykly záporné délky.

11 11-16:57



11 11-16:59