IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 6 — Zadání

Téma

Vlastnosti relací. Ekvivalence, rozklad množiny, třídy ekvivalence. Uspořádání, předuspořádání. Minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádaných množin. Horní a dolní závora, suprémum a infimum. Relace pokrytí na uspořádané množině. Hasseovské diagramy.

Příklad 1.

a) Dokažte, že každé uspořádání je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.
b) Dokažte, že každá ekvivalence je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.

Příklad 2.

Rozhodněte, které z následujících relací jsou předuspořádání, uspořádání, resp. úplná uspořádání. Svá tvrzení dokažte. Pokud je to nutné, tak v definicích předpokládáme, že $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádné množiny.
a) $R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a,b,c\}$
b) $R = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a,b,c\}$
c) $R = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y\} \subseteq 2^A \times 2^A$
d) $R = \{(f,g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$
e) $R = \{((a,b),(c,d)) \mid a \leq_A c \text{ a } d \leq_A b\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$
f) $R = \{(a,b) \mid \exists\, c \in M : a = b + c\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$
g) $R = \{(0,0)\} \cup \{(a,b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
h) $R = \{((a,b),(a,c)) \mid b \leq_B c\} \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$
i) $R = \{(X,Y) \mid \overline{X} \subseteq \overline{Y}\} \subseteq 2^A \times 2^A$

Příklad 3.

Nechť $R \subseteq M \times M$ je předuspořádání na M. Nechť $\sim$ je jádro R. Dokažte, že uspořádaná množina $(M/_\sim, \leq)$ indukovaná předuspořádáním R je dobře definovaná. Tj. dokažte, že $\sim \subseteq M \times M$ je skutečně ekvivalence a $\leq \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$ je skutečně uspořádání.

Příklad 4.

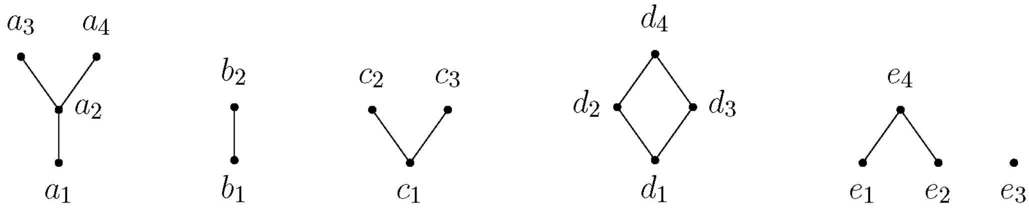
Nechť $R \subseteq M \times M$ je ekvivalence (je to tedy i předuspořádání).
a) Jak vypadá jádro R?
b) Jak vypadá uspořádání indukované relací R na příslušném rozkladu?

Příklad 5.

Nakreslete grafy relací a Hasseovské diagramy následujících uspořádaných množin.
a) $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
b) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
c) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \leq)$
d) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \mathrm{id})$

Příklad 6.

Pro uspořádané množiny zadané Hasseovskými diagramy



$(A, \leq_A)$ $(B, \leq_B)$ $(C, \leq_C)$ $(D, \leq_D)$ $(E, \leq_E)$

nakreslete Hasseovské diagramy (nejen) následujících uspořádaných množin.

a) $(B \times A, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání po složkách
b) $(B \times A, \preceq)$, kde $\preceq$ je lexikografické uspořádání
c) $(D \times B, \leq)$, kde $\leq$ je lexikografické uspořádání
d) $(C \times E, \preceq)$, kde $\preceq$ je uspořádání po složkách

Příklad 7.

Nakreslete Hasseovský diagram množiny funkcí $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ s uspořádáním po bodech, kde pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jsou funkce $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovány následovně

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= 1 \\
f_2(n) &= n + 1 \\
f_3(n) &= n^2 \\
f_4(n) &= n^2 + n + 1 \\
f_5(n) &= n^3 \\
f_6(n) &= n^2 + 6 \\
f_7(n) &= 2^n
\end{aligned}$$

Příklad 8.

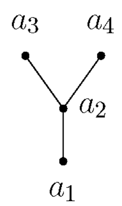
Určete jádro předuspořádání R, příslušný rozklad a uspořádání indukované na tomto rozkladu v případě, že

a) $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$, kde A a B jsou libovolné množiny
b) $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
c) $R = \{(a, b) \mid \exists\, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : a = 5m + k \wedge b = 5n + l \wedge k < l\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
d) $R = \{(a, b) \mid$ pro každé prvočíslo p platí: $p \mid a \Rightarrow p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

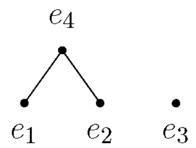
Příklad 9.

Určete všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny

a) $(2^M, \subseteq)$, kde M je libovolná množina
b) $(\mathbb{N}_0, |)$
c) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
d) $(\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$
e) $(A \times E, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání po složkách a uspořádáné množiny $(A, \leq_A)$ a $(E, \leq_E)$ jsou zadané následujícími Hasseovskými diagramy.



$(A, \leq_A)$



$(E, \leq_E)$

Příklad 10.

a) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.
b) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden největší prvek.

Příklad 11.

Pro danou uspořádanou množinu $(M, \leq)$ a její prvek x určete všechny prvky y, které prvek x pokrývá, a všechny prvky z, které pokrývají prvek x.
a) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $x = \{a, c, d\}$
b) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $x = 924$
c) $(M, \leq) = (A \times B, \preceq)$, $x = (a_2, b_2)$, kde $\preceq$ je lexikografické uspořádání a $(A, \leq_A) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \mathrm{id}_A \cup \{(a_1, a_2)\})$ a $(B, \leq_B) = (\{b_1, b_2, b_3\}, \mathrm{id}_B \cup \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3)\})$

Příklad 12.

Najděte takovou uspořádanou množinu, v níž každý prvek kromě minimálních a maximálních prvků bude pokrývat dva prvky a bude pokrýván třemi prvky, a uspořádaná množina bude obsahovat alespoň tři takové prvky.

Příklad 13.

Pro danou podmnožinu X uspořádané množiny $(M, \leq)$ určete její dolní závory, horní závory, infimum a supremum.
a) $(M, \leq) = (2^A, \subseteq)$, kde A je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je $X = \{Y \subseteq A \mid |Y| = n\}$
b) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$
c) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{c\}, \{a, c, d\}\}$
d) $(M, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$
e) $(M, \leq) = (\mathbb{Z}, \leq)$, $X = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
f) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X \subseteq \mathbb{N}$, $|X| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$
g) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$