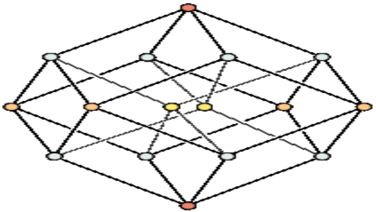
5 Uspořádané množiny, Uzávěry

V této lekci dále pokračujeme probíráním binárních relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměřujeme se nyní především na relace „srovnávající“ objekty podle jejich vlastností. Takto vágně opsané relace mívají jasné společné znaky, které se objevují ve formální definici relace uspořádání.



Stručný přehled lekce

* Uspořádané množiny a relevantní pojmy k uspořádání.
* Hasseovské diagramy uspořádaných množin.
* Uzávěry relací – jak danou relaci „obohatit“ o zvolenou vlastnost.

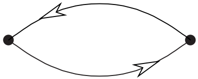
Vlastnosti binárních relací, zopakování

Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

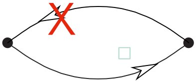
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;

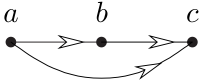
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



5.1 Uspořádání a uspořádané množiny

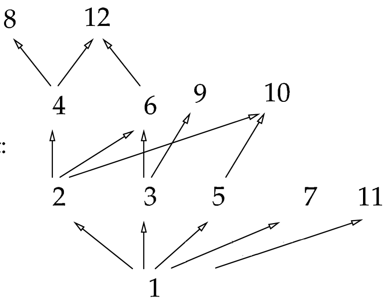
- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *(částečné) uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním. □

- Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „menší nebo rovno“ než y. □

  Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou *nesrovnatelné*.) □

- Jak názorně zobrazit (částečné) uspořádání? Zjednodušeně takto:

dělitelnost:



Poznámka: Zajisté jste se již setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel $\leq$ a „ostrým“ uspořádáním $<$. □Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je vždy „neostré“.

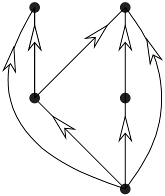
Pokud byste naopak chtěli definovat „ostré“ uspořádání, mělo by vlastnosti ireflexivní, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.)

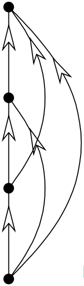
□

Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Definice 5.1. **Uspořádaná množina** je dvojice $(M, \sqsubseteq)$, kde M je množina a $\sqsubseteq$ je (částečné) uspořádání na M. □





□

Definice: Uspořádání R na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v R srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

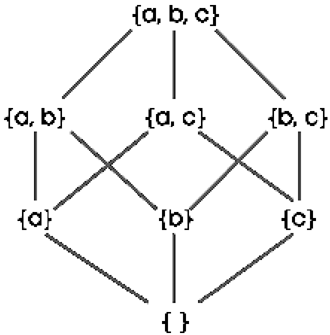
Příklad 5.2. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace uspořádání $R \subseteq M \times M$ definované následovně (jedná se vždy o uspořádání?):*

- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y; $\square$
- $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x; $\square$
- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo. $\square$

Ano, i v posledním bodě se jedná o uspořádání! Zajímavé, že? $\square$

Příklad 5.3. *Další ukázky uspořádaných množin následují zde:*

- $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, kde $\leq$ má „obvyklý“ význam.□
- $(\mathbb{N}, |\,)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „a dělí b“ na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární.□
- Buď M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí nesrovnatelné?



□

Jak rozšířit uspořádání

Příklad 5.4. *Uspořádání „po složkách“.*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\sqsubseteq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \quad \text{právě když} \quad a \leq_A a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \sqsubseteq)$ je uspořádaná množina. Toto usp. se nazývá „po složkách“. □

Příklad 5.5. *Lexikografické uspořádání.*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\preceq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \preceq (a', b') \quad \text{právě když} \quad \text{buď } a \leq_A a' \text{ a } a \neq a', \text{ nebo } a = a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \preceq)$ je uspořádaná množina. Navíc pokud $\leq_A$ i $\leq_B$ jsou lineární, je i $\preceq$ lineární. Toto uspořádání se nazývá lexikografické. □

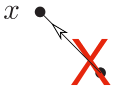
Fakt: Jsou-li $(A_1, \leq_1), \cdots, (A_n, \leq_n)$ uspořádané množiny, kde $n \geq 2$, pak množinu $A_1 \times \cdots \times A_n$ lze uspořádat třeba po složkách nebo lexikograficky.

Všimněte si, že lexikograficky se například řadí slova ve slovníku...

5.2 Další pojmy uspořádaných množin

Definice 5.6. Buď $(M, \sqsubseteq)$ uspořádaná množina.
Prvek $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ je

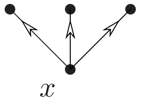
- *minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $y \sqsubseteq x$, pak $x \sqsubseteq y$.
(Tj. x je minimální právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x.)



$\square$

- *maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $x \sqsubseteq y$, pak $y \sqsubseteq x$.
(Tj. x je maximální právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x.) $\square$

- *nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \sqsubseteq y$.

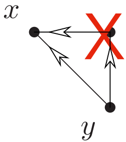


$\square$

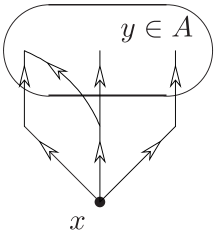
- *největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \sqsubseteq x$.

Prvek $x \in M$

- *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \sqsubseteq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \sqsubseteq z \sqsubseteq x$.

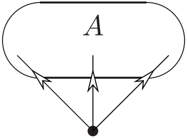


- je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \sqsubseteq y$ pro každé $y \in A$.



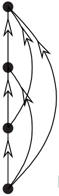
- je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \sqsubseteq x$ pro každé $y \in A$.

- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora množiny A.



- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora množiny A.

- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání $\sqsubseteq$ právě když $(A, \sqsubseteq)$ je *lineárně* uspořádaná množina.

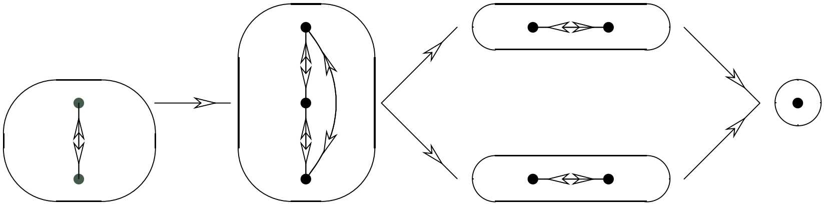


Pozor! Některé uvedené definice mají dosti „netriviální chování“ na nekonečných množinách. Proto je budeme obvykle uvažovat jen nad konečnými množinami...

Relace předuspořádání

Definice: Relace $R \subseteq M \times M$ je *předuspořádání* (také *kvaziuspořádání*, nebo *polouspořádání*) právě když R je reflexivní a tranzitivní. □

Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro daný prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „balíky“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria.



Tvrzení 5.8. *Je-li $\sqsubseteq$ předuspořádání na M, můžeme definovat relaci $\sim$ na M předpisem*

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ je ekvivalence na M, která se nazývá jádro předuspořádání $\sqsubseteq$. □

Na rozkladu $M/\sim$ pak lze zavést relaci $\preceq$ definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je uspořádaná množina. □

Pro ukázku si vezměme relaci dělitelnosti na $\mathbb{Z}$. Pak třeba $-2 \sim 2$.
Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

Tvrzení 5.8. *Je-li* $\sqsubseteq$ *předuspořádání na* M*, můžeme definovat relaci* $\sim$ *na* M *předpisem*

$$x \sim y \quad \textit{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ *je ekvivalence na* M*, která se nazývá jádro předuspořádání* $\sqsubseteq$*.*

Na rozkladu $M/\sim$ *pak lze zavést relaci* $\preceq$ *definovanou takto*

$$[x] \preceq [y] \quad \textit{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ *je uspořádaná množina.*

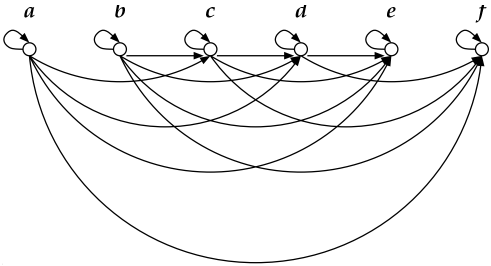
Důkaz (náznak): Tranzitivita a reflexivita relace $\sim$ vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace $\sqsubseteq$. Symetrie $\sim$ pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž $\sim$ skutečně je relací ekvivalence a $M/\sim$ je platný rozklad.

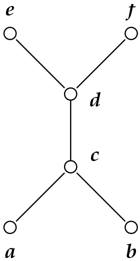
Tranzitivita a reflexivita relace $\preceq$ se opět dědí z relace $\sqsubseteq$. Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu.

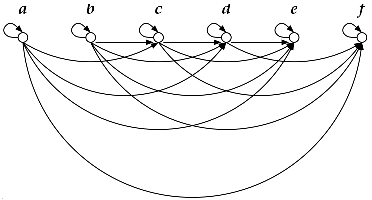
Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$. $\Box$

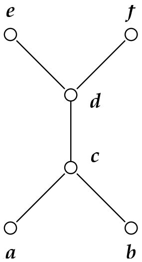
5.3 Hasseovské diagramy

Motivací zavedení tzv. Hasseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky“ než u grafů relací. Například si srovnejte následující:





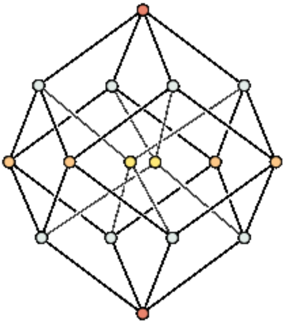




Definice: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny $(M, \sqsubseteq)$ je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

- Do první „horizontální vrstvy" zakreslíme body odpovídající mininálním prvkům $(M, \sqsubseteq)$. (Tj. které nepokrývají nic.) $\square$
- Máme-li již zakreslenu vrstvu i, pak do vrstvy $i+1$ (která je „nad" vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které pokrývají pouze prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i+1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárou").

Příklad 5.9. *Relaci inkluze na čtyřprvkové množině* $\{a, b, c, d\}$ *zakreslíme Hasseovským diagramem takto:*



□

Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „vynecháváme“ ty hrany relace $\sqsubseteq$, které vyplývají z reflexivity či tranzitivity. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace.

Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru“.

Také pojem „*vrstvy*“ v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou nad menšími (pokrývanými).

5.4 Uzávěry relací

Definice: Buď V (nějaká) vlastnost binárních relací. Řekneme, že V je *uzavíratelná*, pokud splňuje následující podmínky:

- Pro každou množinu M a každou relaci $R \subseteq M \times M$ existuje alespoň jedna relace $S \subseteq M \times M$, která má vlastnost V a pro kterou platí $R \subseteq S$.
- Nechť I je množina a nechť $R_i \subseteq M \times M$ je relace mající vlastnost V pro každé $i \in I$. Pak relace $\bigcap_{i \in I} R_i$ má vlastnost V. □

Fakt: Libovolná kombinace vlastností reflexivita, symetrie, tranzitivita je uzavíratelná vlastnost.

Antisymetrie není uzavíratelná vlastnost. □

Věta 5.10. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Buď M množina a R libovolná binární relace na M. Pak pro množinu všech relací $S \supseteq R$ na M majících vlastnost V existuje infimum R_V (vzhledem k množinové inkluzi), které samo má vlastnost V.*

Tuto „nejmenší“ relaci R_V s vlastností V nazýváme V*-uzávěr* relace R.

Tvrzení 5.11. Nechť R je binární relace na M. Pak platí následující poznatky.

- *Reflexivní uzávěr* R je přesně relace $R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$. $\Box$

- *Symetrický uzávěr* R je přesně relace

$$\overleftrightarrow{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}. \Box$$

- *Tranzitivní uzávěr* R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkce, která pro každou binární relaci S vrátí relaci

$$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ takové, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$

a $\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikace funkce $\mathcal{T}$. $\Box$

- Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. $\Box$

- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overleftrightarrow{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R.

- Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží!

Neformálně:

- Význam reflexivních a symetrických uzávěrů je z předchozího zřejmý. □

- Význam tranzitivního uzávěru R^+ je následovný:

  Do R^+ přidáme všechny ty dvojice (x, z) takové, že v R se lze „dostat po šipkách“ z x do z. Nakreslete si to na papír pro nějakou jednoduchou relaci, abyste význam tranzitivního uzávěru lépe pochopili. □

- A jak bylo dříve řečeno, antisymetrický uzávěr relace prostě nemá smysl. □

- Například buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto: $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pak R^* je běžné lineární uspořádání $\leq$ přirozených čísel.