Vlastní čísla, vlastní vektory, iterované procesy

1. Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a určete algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel.

[$A : \lambda_1 = 2, an = 1, gn = 1, \text{Eigen}(2) = \text{Span}\,\langle(1,0,0)\rangle; \lambda_{2,3} = 1, an = 2,$
$gn = 1, \text{Eigen}(2) = \text{Span}\,\langle(1,-1,0)\rangle$]
[$B : \lambda_{1,2,3} = 2, an = 3, gn = 1, \text{Eigen}(2) = \text{Span}\,\langle(2,1,2)\rangle$]
[$C : \lambda_{1,2,3,4} = 1, an = 4, gn = 2, \text{Eigen}(2) = \text{Span}\,\langle(2,-4,-10,0),(2,-4,0,-10)\rangle$]

2. Diagonalizujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left[A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right]$$

3. V ČR je cca 700 tisíc fotbalistů, což zahrnuje profesionální i amatérské fotbalisty. Analyzujte změny v počtech amatatérských a profesionálních hráčů (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže každý rok získá 15% amatérských fotbalistů status profesionála a 10% profesionálních hráčů se stane zpět amatéry.

[dlouhodobě stabilní model - 3/5 profesionálové (tj. 420 tisíc) a 2/5 amatéři (tj. 280 tisíc)]

4. Předpokládejme, že v populačním modelu dravec-kořist (vlk-zajíc) je vztah mezi počtem vlků (V_k) a počtem zajíců (Z_k) v daném a následujícím období následovný:

$$V_{k+1} = 0.6V_k + 0.3Z_k,$$

$$Z_{k+1} = -0.4V_k + 1.3Z_k.$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet vlků a zajíců je $V_0 = 20$ a $Z_0 = 90$.

[dlouhodobě stabilní populace 210 vlků a 280 zajíců]