Příklad 1:
Zjistěte, jestli je daná množina V s uvedenými operacemi ++ a * vektorový prostor. (Znamená to ověřit platnost všech osmi axiomů.) Poznamenejme, že všechny prostory uvažujeme nad **R**.

a) $V = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}, \quad x +\!\!+\, y = x \cdot y, \quad a * x = x^a$

b) polynomy stupně nejvýše 2, tj.
$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$,
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +\!\!+\, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$,
$c * (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2$

c) matice různých typů, např.
$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \mid a, b, ..., e, f \in \mathbf{R} \right\}$ s obvyklým sčítání matic a násobení matice číslem

d) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, ..., e, f \in \mathbf{R} \right\}$ s obvyklým sčítáním matic a násobením matice číslem, všimněte si, že tento prostor je podprostorem matic typu 3x3 z příkladu c)

e) řešení homogenního systému lineárních rovnic (tj. s pravou stanou složenou ze samých nul)

f) řešení nehomogenního systému lineárních rovnic

g) V=**R**, x++y=x+y, a*x=$a^{-1}x$

h) $V=(0,\infty)$, x++y=$x \cdot y$, a*x=$a \cdot x$

i) V=**C**, (a+ib)++(c+id)=(a+b)+i(c+d), k*(a+ib)=ka+ikb

Příklad 2:
Je množina M podprostorem vektorového prostoru V?

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid b = a + c,\ a, b, c \in \mathbf{R} \right\}, \quad V = \mathbf{R}^3$

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x > 0,\ z > 0,\ x, y \in \mathbf{R} \right\}, \quad V = \mathbf{R}^2$

c)
$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \;\middle|\; a+b+c+d+e+f=0,\ a,b,\dots,e,f\in\mathbf{R}\right\},$$
$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,\dots,e,f\in\mathbf{R}\right\}=\mathrm{Mat}(2,3,\mathbf{R})$$

d) $M=\{A \mid \det(A)=0\},\quad V=\mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R})$

e) $M=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{C}$

f) $M=\{f \mid f(1)=0\},\quad V=\mathrm{P}_2(x)$

g) $M=\{f \mid f(2)=1\},\quad V=\mathrm{P}_2(x)$

Příklad 3:
Je daná množina vektorů báze? Určete dimenzi lineárního obalu těchto vektorů.

a) $\{1,x,x^2,x^3\}$ v $\mathrm{P}_2(x)$

a‘) $\{1,x,x^2,x^3\}$ v $\mathrm{P}_3(x)$

b) $\{x^2+x^3, x^3+x, 1, x^2+1\}$ v $\mathrm{P}_2(x)$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}\right\}$ v $\mathbf{R}^4$

d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1\\0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ v $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R})$

e) $\left\{\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}\right\}$ v $\mathbf{R}^4$

f) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ v Mat(2,2,**R**)

g) $\{1+x+x^3, x^3+x, 1, x+1\}$ v $P_2(x)$

h) $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ v $\mathbf{R}^4$

i) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right\}$ v Mat(2,2,**R**)

j) $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ -6\\ 1\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}\right\}$ v $\mathbf{R}^4$

k) $\{1+\mathrm{i}3, 2+\mathrm{i}\}$ v **C**

l) množina kořenů polynomu x^2-2x-3 v **C**

m) množina kořenů polynomu x^2-4x+5 v **C**

Příklad 4:

Vyberte z množiny vektorů *M* nějakou bázi lineárního obalu těchto vektorů.

a) $M = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

b) $M = \left\{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right\}$

c) $M = \{x^2+x^3, x^2+2x, x^3+x, x^3+1, 1, x^2+1\}$

d) $M=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\right\}$

Příklad 5:

Doplňte vektory do báze podprostoru V, abychom dostali bázi vektorového prostoru W. Jakou mají dimenzi V a W?

a) $V=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\},\quad W=\mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R})$

b) $V=\{1+x^3,1-x,x\},\quad W=\mathrm{P}_3(x)$

c) $V=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad W=\mathbf{R}^4$

d) $V=\left\{\begin{pmatrix}1&6\\2&5\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&3\\5&2\\4&1\end{pmatrix}\right\},\quad W=\mathrm{Mat}(3,2,\mathbf{R})$

e) $V=\{3+2\mathrm{i}\},\quad W=\mathbf{C}$

Příklad 6:

Najděte nějakou bázi prostoru řešení následujících homogenních systémů lineárních rovnic. (Některé jsou již zadány maticí.)

a) $\begin{aligned}x+y+z&=0\\2x+2y+3z&=0\\z&=0\end{aligned}$

b) $\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&1&2\\1&2&2&1\\2&2&1&1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 7:
Najděte souřadnice vektoru u v bázi α a ve standardní bázi ε.

a) $u=1+x+x^2$, $\alpha=(x^2+x^3, x^3+x, 1, x^2+1)$, $\varepsilon=(1, x, x^2, x^3)$

b)
$$u=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \alpha=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\quad \varepsilon=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\quad \varepsilon=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

d) $u=5+6i$, $\alpha=(2+i, 3+2i)$, $\varepsilon=(1, i)$

Příklad 8:
Mějme vektorový podprostor generovaný bazí α. Najděte vektor u, jehož souřadnice v bázi α jsou $[u]_\alpha$.

a) $\alpha=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\quad [u]_\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $\alpha = \left(x^2 + x^3, x^3 + x, x^2 + 1 \right), \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\alpha = (2 + \mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}), \quad [u]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Příklad 9:
Je následující zobrazení lineární?
a) zrcadlení v rovině podle přímky y=3x+1
b) otočení v rovině o úhel 60° kolem počátku
c) zrcadlení v rovině podle přímky y=3x
d) otočení v rovině o úhel 60° kolem bodu $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
e) $f : \mathrm{P}_2(x) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f\left(a + bx + cx^2\right) = a + b + c$
f) $f : \mathrm{P}_2(x) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f\left(a + bx + cx^2\right) = a \cdot b \cdot c$
g) $f : \mathrm{P}_2(x) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f\left(a + bx + cx^2\right) = b$
h) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f(A) = \det(A)$

i) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 2a + 3b + c$

j) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^3$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + b \\ a + 2c \\ d \end{pmatrix}$

k) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathrm{P}_2(x)$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + b + (a + 2c)x + dx^2$

l) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathrm{P}_2(x)$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + (ac)x + dx^2$

m) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ dané předpisem $f(a + \mathrm{i}b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ukažte, že je to izomorfizmus.