První 4 příklady jsou z úloh pana Panáka.

Příklad 1. Marek, Petr a Zuzka si házejí míčem. Každý z chlapců hodí balón s pravděpodobností $1/3$ druhému a s pravděpodobností $2/3$ Zuzce. Zuzka rozděluje balóny se stejnou pravděpodobností oběma chlapcům. Popište pohyb balónu jako Markovův proces. S jakou pravděpodobností se po dlouhé době bude míč nacházet u Zuzky?

Příklad 2. Uvažujme následující populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem života tři nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Nezmaři stáří do jednoho měsíce neplodí. Třetina nezmarů po dovršení druhého měsíce života umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni.

Napište Leslieho matici modelu růstu této populace a zjistěte, na jakém poměru mezi jednotlivými věkovými skupinami se populace ustálí. Na jaké hodnotě se ustálí přírustek populace?

Příklad 3. Uvažujme následující situaci: Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s pravděpodobností $1/2$ jej zapomene tam, odkud odchází. Ráno odchází do práce. V práci chodí na oběd do restaurace a zpět. Po skončení práce odchází domů. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den vzít (pokud nezapomene).

- Uvažte tuto situaci jako Markovův proces a napište jeho matici. (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den.)
- Určete vlastní čísla této matice a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1.
- Určete pravděpodobnost, že se profesorův deštník nachází ráno v restauraci.

Příklad 4. Uvažujme následující model bujení byrokracie: počítejme, že každý úředník má místo na 30 let. V prvních a posledních deseti letech v úřade úředník nevytváří nová místa. Naopak v druhých deseti letech úředník vytvoří v průměru 2 nová úřednická místa. Žádné úřednické místo nezaniká. Popište, jak bude růst úřednický aparát (poroste asymptoticky jako jistá geometrická řada). Na jakém poměru se ustálí poměr počtu nových, středně starých a starých úředníků?

Příklad 5. Předpokládejme, že máme model daný následujícím předpisem:

1.
$$m_{k+1} = 2m_k + n_k; \quad n_{k+1} = m_k + 2n_k$$

2.
$$m_{k+1} = m_k - n_k; \quad n_{k+1} = -m_k + n_k$$

3.
$$m_{k+1} = \frac{5}{8}m_k + \frac{3}{8}n_k; \quad n_{k+1} = \frac{3}{8}m_k + \frac{5}{8}n_k$$

Jaký stav bude za 5 let, jestliže počáteční stav je $m_0 = 100$ a $n_0 = 150$. Kolik je $n_k - m_k$? Stabilizuje se tento model na nějaké hodnotě?

Příklad 6. V republice žije 10 milionů obyvatel. Republika je rozdělena na tři části $\check{C}$, M a S. Předpokládejme, že se obyvatelé mezi těmito částmi stěhují takto:

1. 10% z $\check{C}$ se stěhuje na M a 20% se stěhuje do S; 10% z M se stěhuje do $\check{C}$ a 10% do S; 20% ze S se stěhuje do $\check{C}$ a 10% na M
2. 10% z $\check{C}$ se stěhuje na M a 10% se stěhuje do S; 50% z M se stěhuje do $\check{C}$ a nikdo do S; 50% ze S se stěhuje do $\check{C}$ a nikdo na M
3. 10% z $\check{C}$ se stěhuje na M a 10% se stěhuje do S; z M ani ze S se nikdo nikam nestěhuje

Rozhodněte, jak se budou chovat počty obyvatel v jednotlivých částech republiky v dlouhodobém průběhu.