FI: PODZIM 2009 $\boxed{1}$ **Skupina A**

Zkouška MB101, úterý 12.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Kolik různých čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic 1,3,3,3,5,5,5,5,5?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 5 za podmínky, že na první kostce padlo liché číslo.
(c) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na všech kostkách padnou stejná čísla za podmínky, že na prvních dvou kostkách padl součet nejvýše 8.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$ v záporném směru,
(b) zrcadlení vzhledem k ose x,
(c) zrcadlení vzhledem k přímce $y = \sqrt{3}\,x$ svírající s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$.
Určete obraz vektoru $u = (\sqrt{3}, 1)$ v každém z těchto tří zobrazení.
[Nápověda: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} \approx 1.7$.]

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\
2x_1 - x_2 + (r-1)\,x_3 &= 1,\\
x_1 + r^2\,x_3 &= r,\\
4x_1 - x_2 + (r^2+2r-1)\,x_3 &= r+2,
\end{aligned}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru r řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznáme) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & t & 2t \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 & t & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.** Lineární zobrazení $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ mezi vektorovými prostory $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_1$ (polynomy stupně nejvýše 2 a stupně nejvýše 1) je zadáno obrazy polynomů $p_1 = x^2+x$, $p_2 = x+1$, $p_3 = 1$ následovně:

$$L(p_1) = x+1, \quad L(p_2) = x, \quad L(p_3) = x-1.$$

Ve výchozím prostoru $\mathcal{P}_2$ uvažujme standardní bázi $\underline{e} = (x^2, x, 1)$ a také bázi $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ a v cílovém prostoru $\mathcal{P}_1$ uvažujme standardní bázi $\underline{f} = (x, 1)$.
(a) Určete matici A tohoto lineárního zobrazení v bázích $\underline{p}$ a $\underline{f}$.
(b) Určete matici B tohoto lineárního zobrazení ve standardních bázích $\underline{e}$ a $\underline{f}$.
(c) Určete obrazy polynomů x^2 a x v tomto lineárním zobrazení.
(d) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra tohoto lineárního zobrazení (tj. podprostoru polynomů, které se zobrazí na nulový polynom prostoru $\mathcal{P}_1$).

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete také algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot a rozhodněte, jestli je tato matice diagonalizovatelná a jestli je regulární.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 15% městské populace do předměstí a 5% příměstské populace do města.

Zkouška MB101, úterý 12.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Kolik různých čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic 2,4,4,6,6,6,6,6,6?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 5 za podmínky, že na první kostce padlo sudé číslo.
(c) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na všech kostkách padnou stejná čísla za podmínky, že na prvních dvou kostkách padl součet nejvýše 8.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{6}$ $(=30^\circ)$ v kladném směru,
(b) zrcadlení vzhledem k ose y,
(c) zrcadlení vzhledem k přímce $y=\sqrt{3}\,x$ svírající s kladným směrem osy y úhel $\frac{\pi}{6}$ $(=30^\circ)$.
Určete obraz vektoru $u=(\sqrt{3},1)$ v každém z těchto tří zobrazení.
[Nápověda: $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}\approx 1.7$.]

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + \quad\quad\quad\quad x_3 &= -1,\\
2x_1 - x_2 + \quad\; (r-1)\,x_3 &= 3,\\
2x_1 \quad\quad + \quad\quad\quad r^2\,x_3 &= r+2,\\
5x_1 - x_2 + (r^2+2r-1)\,x_3 &= r+7,
\end{aligned}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r\in\mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru r řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznáme) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t\in\mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1=\begin{pmatrix}t & 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0 & t & 0 & t & 2t\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix},$$
$$u_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad u_5=\begin{pmatrix}0 & t & 2 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.** Lineární zobrazení $L:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_1$ mezi vektorovými prostory $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_1$ (polynomy stupně nejvýše 2 a stupně nejvýše 1) je zadáno obrazy polynomů $p_1=x^2+x$, $p_2=x+1$, $p_3=1$ následovně:

$$L(p_1)=x+1,\quad L(p_2)=x,\quad L(p_3)=x-1.$$

Ve výchozím prostoru $\mathcal{P}_2$ uvažujme standardní bázi $\underline{e}=(x^2,x,1)$ a také bázi $\underline{p}=(p_1,p_2,p_3)$ a v cílovém prostoru $\mathcal{P}_1$ uvažujme standardní bázi $\underline{f}=(x,1)$.
(a) Určete matici A tohoto lineárního zobrazení v bázích $\underline{p}$ a $\underline{f}$.
(b) Určete matici B tohoto lineárního zobrazení ve standardních bázích $\underline{e}$ a $\underline{f}$.
(c) Určete obrazy polynomů x^2 a x v tomto lineárním zobrazení.
(d) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra tohoto lineárního zobrazení (tj. podprostoru polynomů, které se zobrazí na nulový polynom prostoru $\mathcal{P}_1$).

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 1 & 0\\ 5 & -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Určete také algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot a rozhodněte, jestli je tato matice diagonalizovatelná a jestli je regulární.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 10% městské populace do předměstí a 10% příměstské populace do města.

Zkouška MB101, úterý 12.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Kolik různých čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic 1,1,1,1,2,2,2,3,3?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 6 za podmínky, že na první kostce padlo liché číslo.
(c) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na všech kostkách padnou stejná čísla za podmínky, že na prvních dvou kostkách padl součet nejvýše 8.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:
(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{6}$ $(= 30^\circ)$ v záporném směru,
(b) zrcadlení vzhledem k ose x,
(c) zrcadlení vzhledem k přímce $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ svírající s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{6}$ $(= 30^\circ)$.
Určete obraz vektoru $u = (1, \sqrt{3})$ v každém z těchto tří zobrazení.
[Nápověda: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} \approx 1.7$.]

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + (r-1)\,x_3 &= 0, \\ -2x_1 + r^2\,x_3 &= r, \\ x_1 - x_2 + (r^2+2r-1)\,x_3 &= r+1, \end{aligned}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru r řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznáme) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & t & 2t \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 & t & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.** Lineární zobrazení $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ mezi vektorovými prostory $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_1$ (polynomy stupně nejvýše 2 a stupně nejvýše 1) je zadáno obrazy polynomů $p_1 = x^2 + x$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 1$ následovně:

$$L(p_1) = x + 1, \quad L(p_2) = x, \quad L(p_3) = x - 1.$$

Ve výchozím prostoru $\mathcal{P}_2$ uvažujme standardní bázi $\underline{e} = (x^2, x, 1)$ a také bázi $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ a v cílovém prostoru $\mathcal{P}_1$ uvažujme standardní bázi $\underline{f} = (x, 1)$.
(a) Určete matici A tohoto lineárního zobrazení v bázích $\underline{p}$ a $\underline{f}$.
(b) Určete matici B tohoto lineárního zobrazení ve standardních bázích $\underline{e}$ a $\underline{f}$.
(c) Určete obrazy polynomů x^2 a x v tomto lineárním zobrazení.
(d) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra tohoto lineárního zobrazení (tj. podprostoru polynomů, které se zobrazí na nulový polynom prostoru $\mathcal{P}_1$).

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete také algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot a rozhodněte, jestli je tato matice diagonalizovatelná a jestli je regulární.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 25% městské populace do předměstí a 15% příměstské populace do města.

FI: PODZIM 2009 $\boxed{1}$ **Skupina D**

Zkouška MB101, úterý 12.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Kolik různých čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic 2,2,2,2,2,4,4,6,6?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**

(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.

(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet alespoň 6 za podmínky, že na první kostce padlo sudé číslo.

(c) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na všech kostkách padnou stejná čísla za podmínky, že na prvních dvou kostkách padl součet nejvýše 8.

3. (3 body) **Elementární geometrie.** Určete matice následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$ v kladném směru,

(b) zrcadlení vzhledem k ose y,

(c) zrcadlení vzhledem k přímce $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ svírající s kladným směrem osy y úhel $\frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$.

Určete obraz vektoru $u = (1, \sqrt{3})$ v každém z těchto tří zobrazení.

[Nápověda: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} \approx 1.7$.]

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Metodou Gaussovy eliminace vyřešte lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\
2x_1 & - & x_2 & + & (r-1)\,x_3 & = & 2, \\
-x_1 & & & + & r^2\,x_3 & = & r-1, \\
2x_1 & - & x_2 & + & (r^2+2r-1)\,x_3 & = & r+3,
\end{array}$$

a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $r \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru r řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete.

5. (3 body) **Determinant.** Výpočtem determinantu (jinou metodu neuznáme) rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů ($t \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & t & 2t \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 & t & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.** Lineární zobrazení $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ mezi vektorovými prostory $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_1$ (polynomy stupně nejvýše 2 a stupně nejvýše 1) je zadáno obrazy polynomů $p_1 = x^2 + x$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 1$ následovně:

$$L(p_1) = x + 1, \quad L(p_2) = x, \quad L(p_3) = x - 1.$$

Ve výchozím prostoru $\mathcal{P}_2$ uvažujme standardní bázi $\underline{e} = (x^2, x, 1)$ a také bázi $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ a v cílovém prostoru $\mathcal{P}_1$ uvažujme standardní bázi $\underline{f} = (x, 1)$.

(a) Určete matici A tohoto lineárního zobrazení v bázích $\underline{p}$ a $\underline{f}$.

(b) Určete matici B tohoto lineárního zobrazení ve standardních bázích $\underline{e}$ a $\underline{f}$.

(c) Určete obrazy polynomů x^2 a x v tomto lineárním zobrazení.

(d) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra tohoto lineárního zobrazení (tj. podprostoru polynomů, které se zobrazí na nulový polynom prostoru $\mathcal{P}_1$).

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete také algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot a rozhodněte, jestli je tato matice diagonalizovatelná a jestli je regulární.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 10% městské populace do předměstí a 5% příměstské populace do města.