Zkouška MB101, pátek 22.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Z číslic $2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6$ náhodně vybereme čtyři číslice a umístíme vedle sebe. Jaká je pravděpodobnost, že tímto způsobem dostaneme číslo 2442?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**

(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.

(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet 5 až 8 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 3 nebo 4.

3. (3 body) **Relace.**

(a) Definujte pojmy kartézský součin množin A a B, relace mezi množinami A a B, relace na množině A.

(b) Definujte reflexivní relaci, symetrickou relaci, tranzitivní relaci, relaci uspořádání na A.

(c) Uveďte příklad relace na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která (i) není reflexivní, (ii) je reflexivní a současně není symetrická, (iii) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**

(a) Definujte pojem hodnosti matice A.

(b) Zformulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti.

(c) Určete hodnosti následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E \text{ je regulární řádu } n, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. (4 body) **Determinant.** Následující lineární systém s parametrem $a \in \mathbb{R}$ vyřešte Kramerovým pravidlem (jiná metoda nebude uznána). Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ tuto metodu nelze použít?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**

(a) Napište definici jádra (obecné) matice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$.

(b) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(c) Určete nějakou ortogonální bázi jádra matice A.

(d) Určete vektor v v jádru matice A, který je nejblíže k vektoru $w = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$ a tuto nejmenší vzdálenost vektoru w od vektoru v (tj. od jádra matice A) spočítejte.

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.**

(a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Určete nějakou bázi $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů matice A. Určete také matici lineárního zobrazení, které je dáno maticí A, v bázi $\underline{v}$ složené z vlastních vektorů.

8. (3 body) **Iterované procesy.** Pražská oblast má cca 1200 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město (centrum), severní předměstí a jižní předměstí. Každý rok se z centra přestěhuje 3% obyvatel na sever a 10% obyvatel na jih, ze severu se přestěhuje 4% obyvatel do centra a 6% obyvatel na jih a z jihu se přestěhuje 5% obyvatel do centra a 5% obyvatel na sever. Zapište tento model v maticovém tvaru a (svými slovy) popište postup, jak by se počítal dlouhodobý efekt tohoto typu stěhování. Tento postup ale dále neprovádějte.

Zkouška MB101, pátek 22.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Z číslic $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$ náhodně vybereme čtyři číslice a umístíme vedle sebe. Jaká je pravděpodobnost, že tímto způsobem dostaneme číslo 3223?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) Házíme dvakrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že padne součet 6 až 9 za podmínky, že na první kostce padlo číslo 1 nebo 3.

3. (3 body) **Relace.**
(a) Definujte pojmy kartézský součin množin A a B, relace mezi množinami A a B, relace na množině A.
(b) Definujte reflexivní relaci, antisymetrickou relaci, tranzitivní relaci, relaci ekvivalence na A.
(c) Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c, d\}$, která (i) není reflexivní, (ii) je reflexivní a současně není symetrická, (iii) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**
(a) Definujte pojem hodnosti matice A.
(b) Zformulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti.
(c) Určete hodnosti následujících matic:

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \quad B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad D = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad E \text{ je regulární řádu } m, \quad F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{smallmatrix}\right).$$

5. (4 body) **Determinant.** Následující lineární systém s parametrem $b \in \mathbb{R}$ vyřešte Kramerovým pravidlem (jiná metoda nebude uznána). Pro které hodnoty $b \in \mathbb{R}$ tuto metodu nelze použít?

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 &= 1, \\ 2\,x_1 + x_2 + b\,x_3 &= 1. \end{aligned}$$

6. (4 body) **Vektorové prostory.**
(a) Napište definici jádra (obecné) matice $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$.
(b) Určete nějakou bázi a dimenzi jádra matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Určete nějakou ortogonální bázi jádra matice B.
(d) Určete vektor v v jádru matice B, který je nejblíže k vektoru $w = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$ a tuto nejmenší vzdálenost vektoru w od vektoru v (tj. od jádra matice B) spočítejte.

7. (4 body) **Vlastní hodnoty.**
(a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Určete nějakou bázi $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů matice B. Určete také matici lineárního zobrazení, které je dáno maticí B, v bázi $\underline{w}$ složené z vlastních vektorů.

8. (3 body) **Iterované procesy.** Pražská oblast má cca 1200 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město (centrum), severní předměstí a jižní předměstí. Každý rok se z centra přestěhuje 10% obyvatel na sever a 3% obyvatel na jih, ze severu se přestěhuje 5% obyvatel do centra a 5% obyvatel na jih a z jihu se přestěhuje 4% obyvatel do centra a 6% obyvatel na sever. Zapište tento model v maticovém tvaru a (svými slovy) popište postup, jak by se počítal dlouhodobý efekt tohoto typu stěhování. Tento postup ale dále neprovádějte.