FI: PODZIM 2008 $\boxed{2}$ **Skupina A**

Zkouška MB101, úterý 27.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (3 body) **Kombinatorika.** Pět hostů přišlo do restaurace a své kloubouky odložili na věšák. Při odchodu si všichni berou zpět tyto klobouky náhodně. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden host nebude mít svůj vlastní klobouk.

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme třemi kostkami současně. Označme náhodné jevy

A = na všech kostkách padne sudé číslo,
B = padne součet 8.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů A a B, jejich společného nastoupení, jejich sjednocení, nastoupení jevu A za podmínky B, nastoupení jevu B za podmínky A.

3. (3 body) **Relace a zobrazení.** Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$ a relaci mezi těmito množinami

$$R = \big\{[1, d], [2, a], [2, b], [3, c], [4, c]\big\} \subseteq A \times B.$$

(a) Určete, jestli je relace R zobrazení a pokud ano, jestli je toto zobrazení surjektivní a/nebo injektivní.
(b) Určete relaci inverzní $R^{-1} \subseteq B \times A$ a rozhodněte, jestli je tato inverzní relace R^{-1} zobrazení.
(c) Určete složenou relaci $R^{-1} \circ R \subseteq A \times A$ a rozhodněte, jestli je tato složená relace reflexivní, symetrická, tranzitivní, ekvivalence.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Následující lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & -3,\\
x_1 & + & x_2 & & & & & = & -1,\\
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0,\\
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 2,\\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 5,\\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1.
\end{array}$$

zřejmě nemá řešení (např. srovnáním prvních dvou rovnic). Určete řešení tohoto systému metodou nejmenších čtverců.

5. (3 body) Uvažujme vektory

$$u_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix}2 & -5 & t & 3\end{pmatrix}.$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Určete, pro které hodnoty t je vektor u_4 lineární kombinací vektorů u_1, u_2, u_3.

6. (4 body) V tomto příkladu používáme vektory u_1, u_2, u_3, u_4 z Příkladu 5.
(a) Určete hodnost matice U, jejímiž řádky jsou vektory u_1, u_2, u_3, u_4 (v závislosti na hodnotě parametru t).
(b) Formulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti.
(c) Na základě Frobeniovy věty rozhodněte, zda má lineární systém s maticí U a pravou stranou $b = (2, 1, 1, 2)^T$ nějaké řešení.

7. (4 body) V tomto příkladu používáme vektory u_1, u_2, u_3, u_4 z Příkladu 5.
(a) Pomocí Gram–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi podprostoru V, který je generován vektory u_1, u_2, u_3.
(b) Určete souřadnice vektoru u_4 (pro hodnotu parametru t z Příkladu 5) vzhledem k bázi, kterou jste určili v části (a) tohoto příkladu.
(c) Určete bázi a dimenzi ortogonálního doplňku $V^\perp$ k podprostoru V v $\mathbb{R}^4$.

8. (5 bodů) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (liška–králík) je vztah mezi počtem lišek (L_k) a králíků (K_k) v daném a následujícím měsíci následovný:

$$\begin{aligned}
L_{k+1} &= 0.6\, L_k + 0.5\, K_k,\\
K_{k+1} &= -0.16\, L_k + 1.2\, K_k,
\end{aligned}$$

přičemž počáteční počet lišek a králíků je $L_0 = 50$ a $K_0 = 100$. Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska.

FI: PODZIM 2008 $\boxed{2}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, úterý 27.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (3 body) **Kombinatorika.** Šest hostů přišlo do restaurace a své kloubouky odložili na věšák. Při odchodu si všichni berou zpět tyto klobouky náhodně. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden host nebude mít svůj vlastní klobouk.

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme třemi kostkami současně. Označme náhodné jevy

A = na všech kostkách padne liché číslo,
B = padne součet 7.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů A a B, jejich společného nastoupení, jejich sjednocení, nastoupení jevu A za podmínky B, nastoupení jevu B za podmínky A.

3. (3 body) **Relace a zobrazení.** Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$ a relaci mezi těmito množinami

$$R = \big\{[1, d], [2, a], [2, b], [3, c], [4, c]\big\} \subseteq A \times B.$$

(a) Určete, jestli je relace R zobrazení a pokud ano, jestli je toto zobrazení surjektivní a/nebo injektivní.
(b) Určete relaci inverzní $R^{-1} \subseteq B \times A$ a rozhodněte, jestli je tato inverzní relace R^{-1} zobrazení.
(c) Určete složenou relaci $R \circ R^{-1} \subseteq B \times B$ a rozhodněte, jestli je tato složená relace reflexivní, symetrická, tranzitivní, ekvivalence.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Následující lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & -3,\\
x_1 & + & x_2 & & & & & = & -1,\\
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0,\\
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 2,\\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 5,\\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1.
\end{array}$$

zřejmě nemá řešení (např. srovnáním prvních dvou rovnic). Určete řešení tohoto systému metodou nejmenších čtverců.

5. (3 body) Uvažujme vektory

$$u_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix},$$
$$u_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix}2 & t & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Určete, pro které hodnoty t je vektor u_4 lineární kombinací vektorů u_1, u_2, u_3.

6. (4 body) V tomto příkladu používáme vektory u_1, u_2, u_3, u_4 z Příkladu 5.
(a) Určete hodnost matice U, jejímiž řádky jsou vektory u_1, u_2, u_3, u_4 (v závislosti na hodnotě parametru t).
(b) Formulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti.
(c) Na základě Frobeniovy věty rozhodněte, zda má lineární systém s maticí U a pravou stranou $b = (2, 1, 1, 2)^T$ nějaké řešení.

7. (4 body) V tomto příkladu používáme vektory u_1, u_2, u_3, u_4 z Příkladu 5.
(a) Pomocí Gram–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi podprostoru V, který je generován vektory u_1, u_2, u_3.
(b) Určete souřadnice vektoru u_4 (pro hodnotu parametru t z Příkladu 5) vzhledem k bázi, kterou jste určili v části (a) tohoto příkladu.
(c) Určete bázi a dimenzi ortogonálního doplňku $V^\perp$ k podprostoru V v $\mathbb{R}^4$.

8. (5 bodů) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (liška–králík) je vztah mezi počtem lišek (L_k) a králíků (K_k) v daném a následujícím měsíci následovný:

$$\begin{aligned}
L_{k+1} &= 0.6\, L_k + 0.5\, K_k,\\
K_{k+1} &= -0.16\, L_k + 1.2\, K_k,
\end{aligned}$$

přičemž počáteční počet lišek a králíků je $L_0 = 60$ a $K_0 = 120$. Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska.