Zkouška MB101, středa 22.6.2011, 9:00–11:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Jsou dány cifry 1,2,3,4,5 a žádná cifra se nesmí opakovat. Kolik je možné z těchto cifer vytvořit čísel, která jsou (a) sudá pětimístná, (b) pětimístná menší než 30000, (c) dvojmístná nebo třímístná?

2. (3 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) V krabici jsou 3 bílé a 2 černé koule. Vytáhneme dvě koule za sebou. Jaká je pravděpodobnost, že jako první vytáhnu bílou a jako druhou černou kouli?

3. (3 body) **Relace.**
(a) Definujte pojmy relace, reflexivní relace, symetrické relace, tranzitivní relace a relace uspořádání na množině A.
(b) Mějme relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ danou následující tabulkou

	1	2	3	4	5
1	•		•		
2		•		•	
3	•		•		•
4				•	
5	•		•		•

Je tato relace reflexivní? Je tato relace symetrická? Je tato relace tranzitivní?

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Pomocí metody nejmenších čtverců vypočtěte řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} &= 1,\\ x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2,\\ x_3 + x_4 &= 3,\\ x_1 + x_3 + x_4 &= 4,\\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} &= 5. \end{aligned}$$

5. (4 body) **Determinant.**
(a) Zformulujte Kramerovo pravidlo pro řešení soustavy $Ax = b$.
(b) Určete determinanty matic A, A^T a A^{-1}, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**
(a) Napište definici vlastního čísla a vlastního vektoru matice A.
(b) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Je tato matice diagonalizovatelná?

7. (4 body) **Vektorové prostory.**
(a) Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Najděte nenulový vektor, který je kolmý na vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(b) Pomocí Grammova–Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru $W \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Poté určete souřadnice vektoru $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi $\underline{V}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (vlk–zajíc) je vztah mezi počtem vlků (V_k) a počtem zajíců (Z_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= 0.6\,V_k + 0.2\,Z_k,\\ Z_{k+1} &= -0.4\,V_k + 1.2\,Z_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet sov a myší je $V_0 = 50$ a $Z_0 = 210$.

FI: JARO 2011 $\boxed{3}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, středa 22.6.2011, 9:00–11:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Jsou dány cifry 1,2,3,4,5 a žádná cifra se nesmí opakovat. Kolik je možné z těchto cifer vytvořit čísel, která jsou (a) lichá pětimístná, (b) pětimístná končící dvojčíslím 21, (c) třímístná nebo čtyřmístná?

2. (3 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) V krabici jsou 3 bílé a 2 černé koule. Vytáhneme dvě koule za sebou. Jaká je pravděpodobnost, že jako první vytáhnu černou a jako druhou bílou kouli?

3. (3 body) **Relace.**
(a) Definujte pojmy relace, reflexivní relace, symetrické relace, tranzitivní relace a relace uspořádání na množině A.
(b) Mějme relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ danou následující tabulkou

	1	2	3	4	5
1	•		•		•
2		•		•	
3	•		•		•
4				•	
5	•		•		•

Je tato relace reflexivní? Je tato relace symetrická? Je tato relace tranzitivní?

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Pomocí metody nejmenších čtverců vypočtěte řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1, \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2, \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 4, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 5. \end{array}$$

5. (4 body) **Determinant.**
(a) Zformulujte Kramerovo pravidlo pro řešení soustavy $Ax = b$.
(b) Určete determinanty matic A, A^T a A^{-1}, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**
(a) Napište definici vlastního čísla a vlastního vektoru matice A.
(b) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Je tato matice diagonalizovatelná?

7. (4 body) **Vektorové prostory.**
(a) Je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Najděte nenulový vektor, který je kolmý na vektor $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(b) Pomocí Grammova–Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru $W \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Poté určete souřadnice vektoru $Y = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \in W$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi $\underline{V}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (vlk–zajíc) je vztah mezi počtem vlků (V_k) a počtem zajíců (Z_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= 0.6\,V_k + 0.3\,Z_k, \\ Z_{k+1} &= -0.4\,V_k + 1.3\,Z_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet sov a myší je $V_0 = 20$ a $Z_0 = 90$.