

Kapitola 2

Kombinatorika

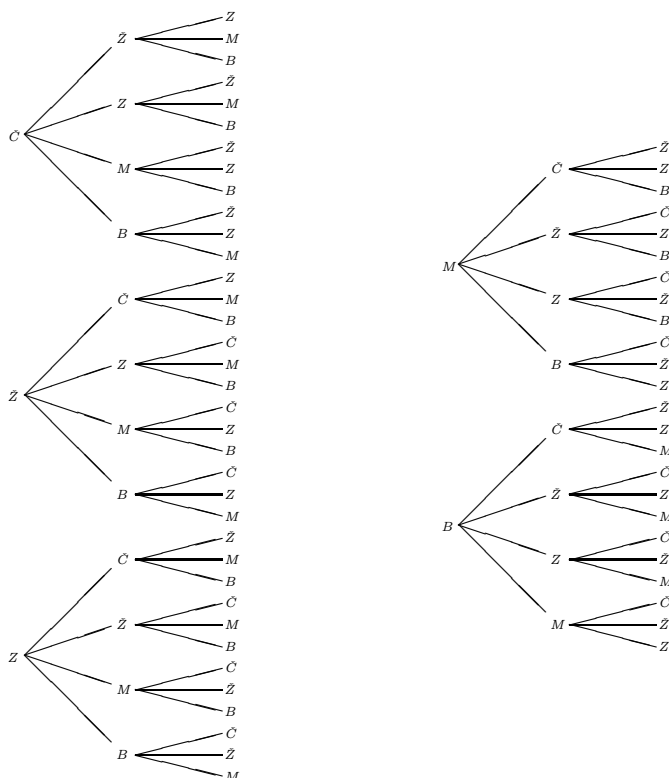
2.1 Počet možných výběrů z předem daného souboru

Budeme se zajímat o počet možných rozlišitelných výběrů zadaného rozsahu z nějakého předem daného konečného souboru předmětů, nikoliv nutně množiny. V souboru, který není množinou, mohou být některé z předmětů navzájem nerozlišitelné. To si lze představit i tak, že některý předmět můžeme vybrat opakovaně, po výběru ho vracíme do souboru. Řešení takto formulovaného problému najdeme jen pro šest speciálních situací. Při řešení není podstatná výsledná formule (vzoreček), podstatný je způsob, jak se k ní dospěje. Analogické úvahy lze totiž provádět i v jiných, nějakým způsobem podobných, situacích.

2.1.1 Variace k -té třídy z n prvků

Základní soubor je tvořen n vzájemně rozlišitelnými prvky. Z nich vybereme k prvků (smysl má samozřejmě pouze případ $k \leq n$) a uspořádáme je do řady. Např. je-li základní soubor tvořen prvky a, b, c, d, e , z něho vybíráme tři prvky a uspořádáváme je, pak se výběr 'acd' liší od výběru 'adc'.

Modelovou úlohou je problém, kolik různých třibarevných vlajek tvořených svislými pruhy lze vytvořit z pruhů látky v barvách červené, žluté, zelené, modré a bílé. Při řešení uvažujeme následujícím způsobem: První pruh (u žerdi) můžeme vybrat z pěti barev. Zůstanou čtyři pruhy a z nich vybereme pruh druhé barvy. Potom zůstanou tři pruhy a z nich vybereme poslední. Označíme-li barvy Č, Ž, Z, M, B, lze možnosti schématicky znázornit obrázkem 2.1. V prvním sloupci je výběr prvního prvku. Tento výběr bylo možno uskutečnit pěti způsoby. K vybranému prvku vybereme (připojíme úsečkou) druhý; tento výběr je možno k danému prvnímu prvku uskutečnit čtyřmi způsoby. Nakonec k vybraným dvěma prvkům vybereme třetí; tento výběr k dané dvojici můžeme provést třemi způsoby. Výsledný počet výběrů (počet třibarevných vlajek) tedy je $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.



Obr. 2.1: K úloze o třibarevných vlajkách na str. 17

Stejně postupujeme, je-li rozsah souboru n a rozsah výběru k . Když označíme počet variací k -té třídy z n prvků symbolem $v(n, k)$, dostaneme

$$v(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+2)(n-k+1). \quad (2.1)$$

2.1.2 Permutace n prvků

Základní soubor je tvořen n rozlišitelnými prvky. Vybereme je všechny a uspořádáme do řady. Stručněji: uspořádáme n rozlišitelných prvků a ptáme se, kolik takových uspořádání existuje.

Modelová úloha může být následující: Máme šest lístečků a na každém z nich jednu z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kolik šesticiferných čísel můžeme vytvořit různým poskládáním těchto lístečků za sebe? Jinak řečeno, kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž zápisu se vyskytuje každá z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 právě jednou?

Je zřejmé, že permutací n prvků je tolik, kolik je variací n -té třídy z n prvků. Tedy označíme-li počet permutací n prvků symbolem $p(n)$, dostaneme

$$p(n) = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Součin $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, tj. součin všech přirozených čísel od 1 do n označíme symbolem $n!$, který čteme „ n faktoriál“,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Faktoriál je uvedeným součinem definován pro libovolné kladné celé číslo. V dalším uvidíme, že je vhodné ho zavést i pro nulu. Klademe

$$0! = 1; \tag{2.2}$$

tuto volbu lze zdůvodnit tak, že existuje jediný způsob, jak uspořádat prvky prázdného souboru — vzít prázdný soubor. Vzoreček pro počet permutací n prvků lze pomocí faktoriálu stručně psát ve tvaru

$$p(n) = n!. \tag{2.3}$$

Odpověď na otázku z modelové úlohy tedy je: $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.

Vzoreček (2.3) lze považovat za výchozí kombinatorickou formuli a odvodit ho podobnou úvahou, jaká je uvedena v 2.1.1. Počet variací k -té třídy z n prvků lze pak odvodit následující úvahou: Vytvoříme všechny permutace n prvků; bude jich $n!$. Permutace, které se shodují na prvních k místech a na zbývajících $n-k$ se liší, budeme považovat za totožné (variace k -té třídy totiž můžeme tvořit tak, že z permutace n prvků „odřízneme“ posledních $n-k$ prvků). Počet variací k -té třídy z n prvků je tedy tolikrát menší než počet permutací n prvků, kolik je možných uspořádání (tj. permutací) $n-k$ prvků, tedy $(n-k)!$ -krát menší. Dostáváme tak vzoreček pro výpočet počtu variací ve tvaru

$$v(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.4}$$

Snadným výpočtem (krácením zlomků) se lze přesvědčit, že ho lze upravit na tvar (2.1):

$$\begin{aligned} v(n, k) &= \frac{n!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1). \end{aligned}$$

Dále platí, že počet permutací n prvků je vlastně počtem variací n -té třídy z n prvků, tj.

$$n! = p(n) = v(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}.$$

Z této rovnice můžeme vypočítat

$$0! = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Tento výpočet ukazuje, že není jiná možnost, jak definovat $0!$, než vztahem (2.2).

2.1.3 Kombinace k -té třídy z n prvků

Základní soubor je opět tvořen n vzájemně rozlišitelnými prvky. Z nich vybereme k prvků (smysl má samozřejmě zase pouze případ $k \leq n$) a neuspořádáváme je. Jinými slovy, zajímáme se o počet k -prvkových podmnožin nějaké n -prvkové množiny. Počet kombinací k -té třídy z n prvků budeme označovat symbolem $c(n, k)$.

Jako modelovou úlohu můžeme vzít: Na konferenci jisté politické strany se sešlo 58 politiků. Mají ze svých řad zvolit a jmenovat tříčlennou delegaci na kongres. Kolika způsoby to mohou udělat?

Představme si, že máme jednu konkrétní kombinaci k -té třídy z n prvků; například kombinaci 'abd' z pěti prvků a, b, c, d, e . Z této jedné kombinace lze vytvořit různými seřazením prvků celkem $p(k) = k!$ variací k -té třídy z n prvků; v našem příkladu jich je $3! = 6$: 'abd', 'adb', 'bad', 'bda', 'dab', 'dba'. Z této úvahy vidíme, že počet variací k -té třídy z n prvků je $k!$ -krát větší, než počet kombinací, tj.

$$v(n, k) = c(n, k) \cdot k!.$$

Z této rovnosti s využitím (2.1) dostaneme

$$c(n, k) = \frac{v(n, k)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

nebo s využitím (2.4)

$$c(n, k) = \frac{v(n, k)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Výraz $\frac{n!}{(n-k)! k!}$ označíme symbolem $\binom{n}{k}$, kterému říkáme kombinační číslo a čteme ho „ n nad k “. Formuli pro výpočet počtu kombinací tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}. \quad (2.5)$$

Nyní můžeme odpovědět na otázku z modelové úlohy. Možných delegací je

$$c(58, 3) = \binom{58}{3} = \frac{58!}{3! 55!} = \frac{58 \cdot 57 \cdot 56}{3 \cdot 2} = 30\,856.$$

Kombinační čísla splňují jednoduché identity

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

První z nich je zřejmá z definice kombinačního čísla, druhou ověříme následujícím výpočtem:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

2.1.4 Variace k -té třídy z n prvků s opakováním (vracením)

Základní soubor je tvořen prvky, které jsou rozděleny do n různých druhů, prvky téhož druhu jsou navzájem nerozlišitelné. Prvků každého druhu je alespoň k . Postupně vybíráme po jednom prvku a řadíme je za sebe. Celkem vybereme k prvků.

Výchozí situaci si lze představit i jiným způsobem. Základní soubor je tvořen n rozlišitelnými prvky. Vybereme z něho jeden, zapíšeme si ho a vrátíme do souboru. Pak vybereme další prvek, zapíšeme ho za první a vrátíme ho. To zopakujeme celkem k -krát (započítán je i výběr prvního prvku). Výsledkem bude záznam seřazených prvků o délce k ; každý z nich se může libovolně krát opakovat.

Počet variací k -té třídy s opakováním lze odvodit podobnou úvahou, jako v případě variací bez opakování. První prvek výběru lze vybrat n způsoby (poněvadž v souboru je n druhů prvků nebo v případě vracení n rozlišitelných prvků). Ke každému vybranému prvku můžeme přidat další opět n způsoby (počet druhů v základním souboru zůstává n nebo po vrácení je v souboru zase n prvků). Výběr zopakujeme k -krát. Označíme-li tedy počet variací k -té třídy z n prvků s opakováním symbolem $V(n, k)$, dostaneme

$$V(n, k) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-krát}} = n^k.$$

2.1.5 Permutace s opakováním v situaci (k_1, k_2, \dots, k_n)

Základní soubor je tvořen k prvky, které jsou rozděleny do n různých druhů, prvky stejného druhu jsou vzájemně nerozlišitelné. Prvků prvního druhu je k_1 , druhého k_2 atd. Samozřejmě má smysl pouze případ, kdy $n \leq k$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1, \dots, k_n \geq 1$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Vybereme všechny prvky a seřadíme je. Jiná formulace je, že máme n prvků, ze souboru vybíráme po jednom prvku, zapisujeme a vracíme ho do základního souboru celkem k -krát. Výsledkem je k prvků seřazených za sebou. Ptáme se, kolik může být takových uspořádaných k -tic, pokud víme, že první prvek se vyskytuje k_1 -krát, druhý k_2 -krát, \dots , n -tý k_n -krát. V této interpretaci můžeme připustit i $k_i = 0$ pro nějaké i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, stále ovšem musí platit, že $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

Označme hledaný počet symbolem $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Představme si, že všechny prvky máme nějak označené, abychom rozlišili i prvky i -tého druhu a permutujeme

je (různým způsobem řadíme). Takových permutací bude

$$p(k) = p(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)!.$$

Pokud odstraníme označení u prvního druhu předmětů, nerozlišíme permutace, u nichž jsou prvky prvního druhu na stejných místech. Např. máme-li prvky dvou druhů a , b a vybíráme 5 prvků, pak při označení předmětů obou druhů jsou permutace

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_1 & a_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

různé, bez označení prvků prvního druhu nerozlišíme permutace

$$\begin{array}{ccccc} a & b_1 & a & b_2 & b_3 \\ a & b_1 & a & b_2 & b_3. \end{array}$$

Rozlišitelných permutací bude tolikrát méně, kolik je možných permutací k_1 prvků, tedy $k_1!$ -krát. Analogickou úvahu provedeme pro prvky všech druhů a dostaneme

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{p(k_1 + k_2 + \dots + k_n)}{p(k_1)p(k_2)\dots p(k_n)} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

Jako modelovou úlohu pro zkoumanou situaci můžeme vzít následující: Máme sedm lístečků, na dvou z nich je napsána číslice 3, na třech číslice 5 a na zbývajících číslice 8. Kolik různých sedmiciferných čísel lze pomocí těchto lístečků vytvořit? V tomto případě je $n = 3$, $k = 7$, $k_1 = 2$ (lístečky s číslicí 3), $k_2 = 3$ (lístečky s číslicí 5) a $k_3 = 7 - (2 + 3) = 2$ (lístečky s číslicí 8). Lze utvořit

$$P(2, 3, 2) = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 210$$

čísel.

2.1.6 Kombinace k -té třídy z n prvků s opakováním (vracením), rozdělování předmětů do přihrádek

Výchozí situace je stejná jako v případě variací k -té třídy z n prvků s opakováním (viz 2.1.4) s tím rozdílem, že nerozlišujeme výběry, ve kterých jsou stejné prvky různě uspořádané (nepřihlížíme k pořadí prvků).

Modelová úloha může být tato: V urně jsou kuličky pěti barev — červené, žluté, zelené, modré a bílé — všechny v dostatečném množství, tj. od každé barvy alespoň jedenáct. Vybereme jedenáct kuliček a dáme je do pytlíku. Ptáme se, kolik barevných kombinací může vzniknout.

V tomto případě závisí pouze na počtech vybraných předmětů jednotlivých druhů, což znamená, že výběr je jednoznačně určen uspořádanou n -ticí celých čísel (k_1, k_2, \dots, k_n) takových, že $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, \dots , $k_n \geq 0$, a $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$; přitom k_1 značí počet vybraných předmětů prvního druhu, k_2 druhého druhu atd. V modelové úloze mohou být například vybrány tři červené kuličky, dvě žluté,

jedna zelená a pět bílých. V takovém případě je $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $k_4 = 0$, $k_5 = 5$. Uspořádanou pětici $(3, 2, 1, 0, 5)$ můžeme také schematicky znázornit takto:

$$\circ \circ \circ | \circ \circ | \circ | | \circ \circ \circ \circ \circ, \quad (2.6)$$

tedy pomocí jedenácti koleček a čtyř čárek. Obecně lze každý výběr znázornit pomocí k koleček a $n - 1$ čárek: před první čárkou je tolik koleček, kolik je vybraných předmětů prvního druhu, mezi první a druhou čárkou je tolik koleček, kolik je vybraných předmětů druhého druhu atd. až za poslední, tj. $(n - 1)$ -ní čárkou je tolik koleček, kolik je vybraných předmětů n -tého druhu. Jinak řečeno, každý výběr odpovídá jedné permutaci s opakováním v situaci $(k, n - 1)$. Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním, který označíme symbolem $C(n, k)$, je podle této úvahy roven počtu permutací s opakováním v situaci $(k, n - 1)$, tj.

$$C(n, k) = P(k, n - 1) = \frac{(k + n - 1)!}{k! (n - 1)!} = \binom{k + n - 1}{k} = \binom{k + n - 1}{n - 1}.$$

Řešení modelové úlohy je

$$C(5, 11) = \binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3003.$$

Podívejme se ještě jednou na schéma (2.6). Stejně dobře bychom ho mohli charakterizovat jako znázornění rozdělení jedenácti předmětů do pěti přihrádek, rozřídění jedenácti objektů do pěti druhů. Odtud je vidět, že odpověď na otázku, kolika způsoby lze rozdělit k předmětů do n přihrádek, je opět $C(n, k)$. Můžeme přidat i podmínku, že v každé přihrádce má být alespoň l předmětů. Pokud je $nl < k$, pak je těchto způsobů 0, předmětů je totiž příliš málo a podmínku splnit nemůžeme. Pokud je $nl \geq k$, můžeme si představit, že nejprve přidělíme do každé přihrádky l předmětů (což lze udělat jediným způsobem) a na další přidělování nám zbude o nl předmětů méně. Způsobů je tedy $C(n, k - nl)$.

2.1.7 Další příklady

Příklad 1. V noclehárně je 50 lůžek. Určete, kolika způsoby je možno na ně umístit 35 nocležníků.

Z hlediska provozovatele ubytovny nezáleží na tom, kdo na kterém lůžku leží. Podstatné je pouze to, která lůžka jsou obsazena. Z jeho pohledu tedy je možno lůžka obsadit

$$\begin{aligned} c(50, 35) &= \binom{50}{35} = \binom{50}{15} = \\ &= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 2,250\,829\,575 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

způsoby.

Z hlediska ubytovaných záležití na tom, kdo na kterém lůžku leží, jaké má sousedy ap. Z jejich pohledu tedy je

$$v(50, 35) = \frac{50!}{15!} = 2,325\,815\,505 \cdot 10^{52}$$

způsobů obsazení lůžek. \square

Příklad 2. Kolik různých slov, i bez významu, je možno vytvořit přeskládáním písmen ve slově *LOKOMOTIVA*? Kolik je mezi nimi takových slov, v nichž nejsou žádná dvě stejná písmena vedle sebe? A v kolika slovech se pravidelně střídají souhlásky a samohlásky?

V uvedeném slově se vyskytují jednoduše písmena *A, I, K, L, M, T, V* — je jich 7 — a třikrát písmeno *O*. Ve slově samozřejmě na pořadí písmen záleží. Máme 8 druhů písmen, jednoho druhu jsou tři exempláře, ostatních po jednom. Počet všech slov tedy bude

$$P(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3) = \frac{10!}{1!1!1!1!1!1!1!3!} = 594\,800.$$

Při hledání odpovědi na druhou otázku nejprve seřadíme písmena *A, I, K, L, M, T, V*. To můžeme udělat $p(7)$ způsoby. Každé ze tří písmen *O* můžeme zařadit na začátek slova, na jeho konec nebo do mezery mezi zbývajících písmen, tedy na 8 různých pozic. Každou z těchto pozic můžeme vybrat pouze pro jedno *O*. Vybíráme tedy tři pozice z osmi možných, na které umístíme nerozlišitelná písmena *O*. Tento výběr lze udělat $c(8, 3)$ způsoby. Celkem tedy můžeme vytvořit

$$p(7) c(8, 3) = 7! \binom{8}{3} = 7! \frac{8!}{5!3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 282\,240$$

slov požadované vlastnosti.

Souhlásky jsou *K, L, M, T, V* a samohlásky *A, I, O*. Všechny souhlásky se vyskytují po jedné, lze je tedy uspořádat $p(5)$ způsoby. Samohlásky *A, I* se vyskytují jednou, samohlásky *O* třikrát. Lze je tedy seřadit $P(1, 1, 3)$ způsoby. Dále jsou dvě možnosti volby, zda první písmeno bude souhlásky nebo samohlásky. Celkem tedy můžeme vytvořit

$$2p(5)P(1, 1, 3) = 2 \cdot 5! \cdot \frac{5!}{3!} = \frac{(5!)^2}{3} = 3\,600$$

slov, v nichž se střídají samohlásky a souhlásky. \square

Příklad 3. Kolika způsoby lze rozdělit 50 stejných kuliček mezi čtyři chlapce? Kolika způsoby lze toto rozdělení udělat tak, aby každý dostal alespoň jednu kuličku?

Můžeme si představit, že každý z chlapců je charakterizován nějakou „svou přihrádkou“, např. pytlíkem na kuličky nebo kapsou. Pak se jedná o rozdělení 50

předmětů do čtyř přihrádek. Podle posledního odstavce 2.1.6 je odpověď na první otázku

$$C(4, 50) = \binom{53}{3} = \frac{53 \cdot 52 \cdot 51}{3 \cdot 2} = 23\,426$$

a na druhou

$$C(4, 46) = \binom{49}{3} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47}{3 \cdot 2} = 18\,424.$$

□

Příklad 4. Kolika způsoby lze mezi tři děti rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek?

Prakticky neomezeně mnoha. Ovoce lze totiž krájet. Pokud z nějakého důvodu krájet nemůžeme (bojíme se úrazu, nemáme nůž), rozdělíme nejdříve hrušky, což lze $C(3, 7)$ způsoby, a potom jablka, což lze udělat $C(3, 5)$ způsoby. Jakékoliv přidělení hrušek lze libovolně zkombinovat s libovolným přidělením jablek. Celkem tedy lze děti podělit

$$C(3, 7) C(3, 5) = \binom{9}{2} \binom{7}{2} = \frac{9!}{2! 7!} \frac{7!}{2! 5!} = 576$$

způsoby.

Příklad 5. (důležitý) Určete, kolik existuje podmnožin n -prvkové množiny.

1. způsob řešení: Podle 2.1.3 víme, že počet k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny je $c(n, k)$. Všechny podmnožiny včetně prázdné tedy je

$$c(n, 0) + c(n, 1) + c(n, 2) + \cdots + c(n, n-1) + c(n, n) = \sum_{k=0}^n c(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

2. způsob řešení: Představme si, že všechny prvky množiny jsou seřazeny za sebou. Konkrétní podmnožinu můžeme určit tak, že pod každý prvek napíšeme symbol 0 nebo 1 podle toho, zda tento prvek patří nebo nepatří do podmnožiny. Např. pro pětiprvkovou množinu $\{a, b, c, d, e\}$ a její tříprvkovou podmnožinu $\{a, c, d\}$ máme

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0. \end{array}$$

Počet podmnožin tedy bude stejný jako počet uspořádaných n -tic prvků 0 a 1, tedy počet variací k -té třídy ze dvou prvků s opakováním,

$$V(2, n) = 2^n.$$

Dostali jsme výsledek ve dvou různých tvarech. Musí tedy platit

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Tato rovnost je speciálním případem binomické věty

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

pro $a = b = 1$. □

Příklad 6. Kolika způsoby lze na šachovnici vybrat

- a) dvě pole;
- b) dvě pole různé barvy;
- c) dvě pole neležící v téže sloupci a téže řadě;
- d) dvě pole různé barvy neležící v téže sloupci a téže řadě;
- e) osm polí tak, aby v každém řádku a každém sloupci bylo právě jedno;
- f) k polí ($1 \leq k \leq 8$) tak, aby v každém řádku a každém sloupci bylo právě jedno?

a) Na šachovnici je celkem 64 polí, vybíráme dvě a na uspořádání (pořadí) vybraných polí nezáleží. Možností tedy je

$$c(64, 2) = \binom{64}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 2016.$$

b) Na šachovnici je celkem 32 polí bílých a 32 polí černých. Představme si, že nejdříve vybereme pole bílé (to můžeme udělat 32 způsoby) a k němu vybereme pole černé (což můžeme udělat opět 32 způsoby). Celkem tedy máme $32 \cdot 32 = 1024$ možností výběru.

c) Tuto úlohu můžeme také zformulovat jako otázku, kolika způsoby lze na šachovnici umístit dvě věže tak, aby se vzájemně neohrožovaly. Nejprve vybereme jedno pole, což můžeme udělat 64 způsoby. Jako druhé již nemůžeme vybrat totéž pole ani žádné pole ze stejné řady (kterých je 7) ani žádné pole ze stejného sloupce (kterých je opět sedm); můžeme tedy vybírat ze $64 - 1 - 7 - 7 = 49$ polí. Při tomto způsobu vybírání bude ale každá dvojice polí ve výběru dvakrát; jednou, když jedno pole vybereme jako první a zbývající jako druhé, podruhé naopak. Dvojic polí zadaných vlastností bude proto dvakrát méně. Celkem tedy můžeme vybrat dvě pole požadovaných vlastností

$$\frac{64 \cdot 49}{2} = 1568$$

způsoby.

Úlohu lze řešit i jiným způsobem. Určíme, kolika způsoby lze vybrat dvě pole nemající požadovanou vlastnost, tj. taková, která leží buď ve stejném sloupci nebo stejné řadě. Vybereme jedno pole; to můžeme udělat 64 způsoby. Potom vybereme druhé; pro jeho výběr máme $7 + 7$ možností — vybíráme ze sedmi polí v téže sloupci a ze sedmi polí v téže řadě. Celkem tedy můžeme vybrat dvě pole uvažované vlastnosti, jedno po druhém, $64 \cdot (7 + 7)$ způsoby. Poněvadž ale ve výsledném výběru nezáleží na tom, v jakém pořadí jsme pole vybírali, je vyhovujících výběrů dvakrát méně, tj. $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot (7 + 7) = 448$. Počet výběrů dvou polí požadované vlastnosti je

roven počtu všech výběrů dvou polí (úloha a)) zmenšený o počet výběrů, které požadovanou vlastnost nemají, tedy $2016 - 448 = 1568$.

Úvaha vedoucí k výsledku může být ještě jiná. Znovu začneme určením počtu výběrů, které nemají požadovanou vlastnost. Dvě pole v téže sloupci můžeme vybrat $c(8, 2)$ způsoby, jeden sloupec můžeme vybrat 8 způsoby, takže dvě pole ležící v téže sloupci můžeme vybrat $8 \cdot c(8, 2)$ způsoby. Stejnou úvahou lze ukázat, že dvě pole ležící v téže řadě, lze vybrat také $8 \cdot c(8, 2)$ způsoby. Dvě pole ležící v téže řadě nebo v téže sloupci lze tedy vybrat $8 \cdot c(8, 2) + 8 \cdot c(8, 2)$ způsoby. Počet výběrů požadované vlastnosti je opět

$$c(64, 2) - (8 \cdot c(8, 2) + 8 \cdot c(8, 2)) = \frac{64 \cdot 63}{2} - \left(8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} + 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}\right) = 1568.$$

d) Nejprve vybereme jedno bílé pole. Z 32 černých polí již nemůžeme vybírat ze čtyř polí ve stejné řadě a ze čtyř polí ve stejném sloupci, takže můžeme vybírat z 24 možností. Dvě pole požadovaných vlastností tedy můžeme vybrat $32 \cdot 24 = 768$ způsoby.

e) Začneme výběrem pole v prvním sloupci. To můžeme udělat osmi způsoby. Ve druhém poli máme na výběr již jen sedm polí, neboť pole v řádku, na němž je vybrané pole z prvního sloupce podle podmínek úlohy vybrat nelze. Jedno ze sedmi polí ve druhém sloupci vybereme. Ve třetím sloupci zůstane na výběr šest polí, atd. Celkem tedy můžeme požadovaná pole vybrat $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$ způsoby.

f) Vybereme k sloupců, z nichž potom budeme jednotlivá pole vybírat. To můžeme udělat $c(8, k)$ způsoby. Podobně jako v úloze e) můžeme v prvním z vybraných sloupců vybrat jedno pole osmi způsoby, ve druhém sedmi, atd. Po výběru sloupců tedy můžeme jednotlivá pole (tj. řádky) vybírat $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (8 - k + 1) = v(8, k)$ způsoby. Pole požadovaných vlastností můžeme tedy celkem vybrat

$$c(8, k) v(8, k) = \binom{8}{k} \frac{8!}{(8-k)!} = \frac{8!^2}{k!(8-k)!^2}$$

způsoby.

Všimněme si, že úlohy c) a e) jsou speciálními případy úlohy f); úloha c) pro $k = 2$, úloha e) pro $k = 8$. Výsledky jsou stejné, každá z úvah vedoucí k výsledku v případě c) byla jiná. \square

Příklad 7. Určete, kolik existuje šesticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou tři cifry sudé a tři cifry liché.

Sudé cifry jsou 0, 2, 4, 6, 8, liché jsou 1, 3, 5, 7, 9. Na první pozici může stát libovolná z pěti lichých cifer nebo sudá cifra různá od 0. Pro čísla začínající sudou cifrou je tedy jiný počet možných výběrů první cifry než v případě čísla začínajícího cifrou lichou. Věnujme se proto nejprve číslům začínajícím sudou cifrou.

Nejprve určíme počet „konfigurací“ dvou sudých a tří lichých číslic, tj. kolika způsoby lze určit, na kterých pozicích budou sudé a na kterých liché cifry. Každou takovou „konfiguraci“ lze znázornit jako permutaci prvků s, s, l, l, l . Takových permutací podle 2.1.5 je $P(2, 3)$.

Pro danou „konfiguraci“ dvou sudých a tří lichých cifer určíme počet možných konkrétních výběrů cifer dané parity. Na každou pozici můžeme vybrat libovolnou z pěti cifer, celkový počet možností tedy je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$.

Libovolnou „konfiguraci“ můžeme „naplnit“ libovolným z 5^5 konkrétních výběrů cifer a jim předřadit libovolnou ze čtyř nenulových sudých cifer. Celkový počet možností tedy je

$$P(2, 3) \cdot 5^5 \cdot 4 = \frac{5!}{2!3!} 5^5 4.$$

Analogickou úvahou ukážeme, že šesticiferných čísel splňujících danou podmínku a začínajících lichou cifrou je

$$\frac{5!}{2!3!} 5^5 5.$$

Všech čísel vyhovujících zadané podmínce tedy je

$$\frac{5!}{2!3!} 5^5 4 + \frac{5!}{2!3!} 5^5 5 = \frac{5!}{2!3!} 5^5 9 = 281\,250.$$

□

Příklad 8. (náročnější ale zajímavý) Kolik je všech permutací n prvků a_1, a_2, \dots, a_n takových, že pro žádné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ není prvek a_i na i -tém místě?

Označme hledaný počet symbolem d_n . Je-li $n = 1$, je $d_1 = 0$ — jediný prvek a_1 může být na jediné, tj. první pozici. Je-li $n = 2$, je $d_2 = 1$ — jediná permutace vyhovující podmínce úlohy je $a_2 a_1$.

Buď $n > 2$. Rozdělme všech d_n permutací na $n - 1$ disjunktních skupin podle toho, který prvek je na prvním místě (skupin je $n - 1$, neboť prvek a_1 na prvním místě být nemůže). Vezmeme nějaké k z množiny $\{2, 3, \dots, n\}$ a budeme se zabývat skupinou permutací, které mají na prvním místě prvek a_k . Tu rozdělíme na dvě disjunktní podskupiny: do první dáme permutace, které mají prvek a_1 na k -tém místě, do druhé ty ostatní. V první podskupině je d_{n-2} permutací — dvě místa, první a k -té, máme obsazena, na ostatních je zbývajících $n - 2$ prvků umístěno podle zadání úlohy. Permutací ve druhé skupině je tolik, kolik je všech možných uspořádání $n - 1$ prvků

$$a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_1, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$$

takových, že žádný prvek není na té pozici, na níž je napsán. Tedy permutací ve druhé podskupině je d_{n-1} . Permutací v uvažované skupině je celkem $d_{n-2} + d_{n-1}$. Stejnou úvahu můžeme provést pro každou skupinu, tj. můžeme ji provést celkem $(n - 1)$ -krát. Tím dostaneme, že hledaný počet permutací je

$$d_n = (n - 1)(d_{n-2} + d_{n-1}).$$

Poněvadž známe d_1 a d_2 , můžeme vypočítat

$$d_3 = (3 - 1)(0 + 1) = 2,$$

poněvadž známe d_2 a d_3 , můžeme dále vypočítat

$$d_4 = (4 - 1)(1 + 2) = 9$$

a dále

$$\begin{aligned} d_5 &= (5 - 1)(2 + 9) = 44, \\ d_6 &= (6 - 1)(9 + 44) = 265, \\ d_7 &= (7 - 1)(44 + 265) = 1\,854, \\ d_8 &= (8 - 1)(265 + 1\,854) = 14\,833, \end{aligned}$$

atd. Vidíme, že hodnoty d_n s přibývajícím n velmi rychle rostou, řešit úlohu vypsáním všech možností by pro větší n bylo prakticky nemožné. Jiný způsob řešení úlohy bude uveden na str. 38. \square

2.2 Příhrádkový princip

S rozdělováním předmětů do příhrádek (sr. 2.1.6) souvisí i jednoduchý *příhrádkový princip*: Necht k , n jsou přirozená čísla, $k > n$. Při jakémkoliv rozdělení k předmětů do n příhrádek existuje příhrádka, v níž budou alespoň dva předměty.

Příhrádkový princip je obecnou formulací populární úlohy: „Zjistěte, zda mezi obyvateli Brna existují dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů.“ Tuto úlohu samozřejmě nelze vyřešit spočítáním vlasů u všech obyvatel Brna. Musíme si pomoci úvahou. Jeden člověk má na hlavě maximálně 300 000 vlasů¹, Brno má 369 299 obyvatel². Lidí, kteří nemají stejný počet vlasů je nejvýše 300 001 — úplně plešatý, s jedním vlasem, se dvěma vlasy, atd. až nakonec člověk s 300 000 vlasy. Protože počet obyvatel Brna je větší, musí mezi nimi být dva lidé se stejným počtem vlasů.

Tato úloha je ukázkou důkazu sporem. Ten sice zaručí existenci nějakého objektu — v našem případě dvojice osob, které mají v jeden okamžik stejný počet vlasů — ale nedává žádný návod, jak tento objekt najít. Navíc ani nemůžeme znát nějaké jeho další vlastnosti — v našem případě např. nevíme, zda jsou tyto osoby téhož pohlaví; žen je totiž 194 148 a mužů 175 151, tedy počty nižší, než odhadnutý maximální počet vlasů. Matematika může dát jistotu o existenci něčeho, co nikdo nikdy neviděl, ani vidět nemohl a o čem dokonce ani nemůžeme všechno vědět.

2.3 Princip inkluze a exkluze

Budeme se zajímat o počty prvků jistých konečných množin; konkrétně takových, které jsou sjednocením k jiných množin. Počet prvků množiny A označíme symbolem $|A|$.

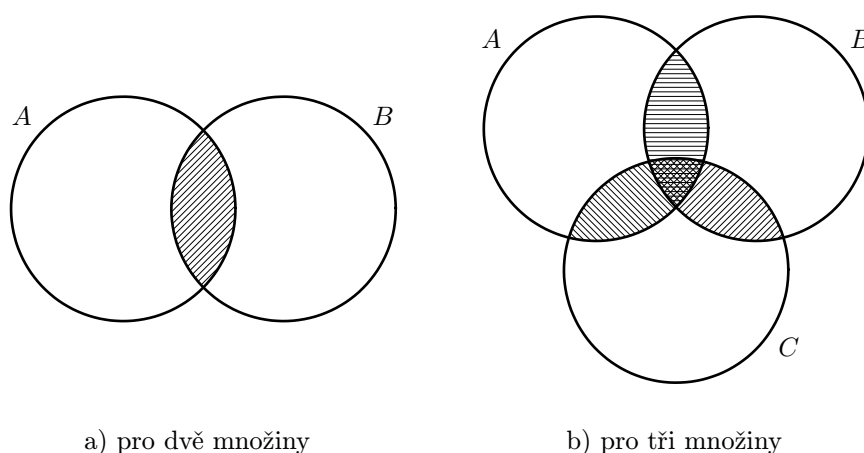
¹V literatuře lze najít různé údaje. Jako průměrný počet vlasů na hlavě jsou v učebnici L. Borovanský a kol., *Soustavná anatomie člověka*, Avicenum, Praha 1976 na str. 954 uvedeny hodnoty 80 000, 120 000, 140 000. Hodnota 300 000 je větší než dvojnásobek nejvyšší uváděné průměrné; mohl by to být rozumný odhad maximálního počtu vlasů na jedné hlavě.

²Údaj ČSÚ z 31. 3. 2004.

2.3.1 Dvě nebo tři množiny

V případě $k = 2$, tedy v případě dvou množin A, B , je situace jednoduchá; je znázorněna na obr. 2.2 a). Sečteme-li počty prvků v jednotlivých množinách, započítáme tím prvky, které jsou oběma množinám společné (tj. prvky z $A \cap B$, které jsou vyznačeny šrafovaně) dvakrát — poprvé spolu s prvky množiny A , podruhé s prvky množiny B . Proto je musíme odečíst. Dostaneme

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (2.7)$$



Obr. 2.2: K principu inkluze a exkluze

V případě $k = 3$ je situace trochu složitější, viz obr. 2.2 b), ale i zde poměrně snadno odvodíme příslušný vzorec. Sečteme-li prvky v jednotlivých množinách, započítáme tím prvky ležící v jednoduše šrafovaných oblastech dvakrát a prvky ležící v trojitě šrafované oblasti třikrát. Každý z průniků $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ obsahuje jednu z jednoduše šrafovaných oblastí a trojitě šrafovanou oblast. Při odečtení počtů prvků z těchto průniků tedy odečteme prvky z jednoduše šrafovaných oblastí a současně odečteme třikrát počet prvků z trojitě šrafované oblasti (průniku $A \cap B \cap C$), tj. všechny tyto prvky. Ony ovšem do sjednocení množin $A \cup B \cup C$ patří, takže je musíme k celkovému počtu přičíst. Dostáváme tak vzorec

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (2.8)$$

Ze vzorců (2.7) a (2.8) i ze způsobu jejich odvození vidíme, že počet prvků sjednocení nějakých množin dostane jako součet prvků jednotlivých množin od kterého odečteme počty prvků průniků těchto množin a k tomu, v případě tří množin opět přičteme počet prvků průniku množin. Z toho je také zřejmé, proč se

uvedená kombinatorická úvaha nazývá *princip inkluze a exkluze*³.

Příklad 9. Od řeky se vrací skupina spokojených rybářů. Spokojeni jsou proto, že každý z nich něco ulovil. V jejich úlovku jsou dva druhy ryb, kapři a cejni. Kapra ulovilo osm rybářů, cejna pět rybářů, kapra i cejna si odnáší tři rybáři. Kolik je rybářů? Kolik by bylo rybářů v případě, že by dva z nich měli ve svém úlovku i sumce, přičemž dva druhy ryb ulovili čtyři rybáři a žádný z těch, kteří ulovili sumce, neulovili cejna?

Označme K množinu rybářů, kteří ulovili kapra a C množinu rybářů, kteří ulovili cejna. Podle zadání je $|K| = 8$, $|C| = 5$, $|K \cap C| = 3$. Poněvadž každý z rybářů něco ulovil, je jejich počet roven $|K \cup C|$. Podle (2.7), kde píšeme K místo A a C místo B , dostaneme

$$|K \cup C| = |K| + |C| - |K \cap C| = 8 + 5 - 3 = 10.$$

Na první otázku lze samozřejmě odpovědět i přímočarou úvahou: Poněvadž tři rybáři ulovili kapra i cejna, tak jenom kapra ulovilo $8 - 3 = 5$ rybářů a jenom cejna ulovili $5 - 3 = 2$ rybáři. Celkový počet rybářů je součet těch, kteří ulovili oba druhy, těch, kteří ulovili jenom kapra a těch, kteří ulovili jenom cejna, tedy $3 + 5 + 2 = 10$ rybářů.

Označme dále S množinu rybářů, kteří ulovili sumce. Podle zadání je počet jejich prvků $|S| = 2$. Poněvadž žádný z rybářů neulovil sumce i cejna, je $S \cap C = \emptyset$ a tedy také $S \cap C \cap K = \emptyset$; to znamená, že $|S \cap C| = 0$, $|S \cap C \cap K| = 0$. Dva druhy ulovili čtyři rybáři, z nich tři mají kapra a cejna, takže jeden má kapra i sumce, $|K \cap S| = 1$. Celkový počet rybářů nyní podle (2.8) je

$$\begin{aligned} |K \cup C \cup S| &= |K| + |C| + |S| - |K \cap C| - |K \cap S| - |C \cap S| + |K \cap C \cap S| = \\ &= 8 + 5 + 2 - 3 - 1 - 0 + 0 = 11. \end{aligned}$$

□

Příklad 10. Z pytlíku, v němž jsou 3 žluté, 1 modrá, 10 červených a 19 zelených kuliček nabere hrst deseti kuliček. Kolik různých hrstí můžeme dostat?

Nejprve si představme, že v pytlíku je alespoň deset kuliček od každé barvy. Označme M množinu všech možných hrstí deseti kuliček uvedených barev a A , B podmnožiny množiny M takové, že

A ... množina hrstí, v nichž je více než 3 žluté kuličky,

B ... množina hrstí, v nichž je více než 1 modrá kulička.

Hledaný počet hrstí bude $|M| - |A \cup B|$.

Podle 2.1.6 je

$$|M| = C(4, 10) = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286,$$

³Z latinského includere — vložit, pojmout, vsadit; excludere — vyloučit, nevpustit, zabránit v přístupu. Tedy „princip zahrnutí a odstranění“ nebo „princip zařazení a vyloučení“.

a podle principu inkluze a exkluze (2.7) je

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Buď $i \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a symbolem A_i označme podmnožinu množiny A takovou, že hrsti z množiny A_i obsahují právě i žlutých kuliček. Zřejmě platí

$$|A| = |A_4| + |A_5| + |A_6| + |A_7| + |A_8| + |A_9| + |A_{10}| = \sum_{i=4}^{10} |A_i|.$$

Můžeme si představit, že hrsti z množiny A_i jsme vytvořili tak, že jsme vzali i žlutých kuliček a k nim přidali hrst $10 - i$ kuliček zbývajících tří barev. Takových hrstí je $C(3, 10 - i)$ a stejný je tedy i počet prvků množiny A_i ,

$$|A_i| = C(3, 10 - i) = \binom{12 - i}{2}.$$

Platí tedy

$$|A| = \sum_{i=4}^{10} \binom{12 - i}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} = 84.$$

Analogickou úvahou lze odvodit, že

$$|B| = \sum_{i=2}^{10} \binom{12 - i}{2} = 165.$$

Buďte nyní $i \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $j \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ taková čísla, že $i + j \leq 10$ a označme symbolem C_{ij} takovou podmnožinu množiny M , že hrsti z této množiny obsahují právě i žlutých a j modrých kuliček. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |C_{42}| + |C_{43}| + |C_{44}| + |C_{45}| + |C_{46}| + \\ &+ |C_{52}| + |C_{53}| + |C_{54}| + |C_{55}| + |C_{62}| + |C_{63}| + |C_{64}| + \\ &+ |C_{72}| + |C_{73}| + |C_{82}| = \sum_{i=4}^8 \sum_{j=2}^{10-i} |C_{ij}|. \end{aligned}$$

Opět si můžeme představit, že hrsti z množiny C_{ij} jsme vytvořili tak, že jsme vzali i žlutých a j modrých kuliček a k nim jsme přidávali $10 - (i + j)$ kuliček zbývajících dvou barev. Tedy

$$|C_{ij}| = C(2, 10 - i - j) = \binom{11 - i - j}{1} = 11 - i - j$$

a dále

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= (11 - 6) + (11 - 7) + (11 - 8) + (11 - 9) + (11 - 10) + \\ &+ (11 - 7) + (11 - 8) + (11 - 9) + (11 - 10) + (11 - 8) + (11 - 9) + (11 - 10) + \\ &+ (11 - 9) + (11 - 10) + (11 - 10) = 35. \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$|A \cup B| = 84 + 165 - 35 = 214,$$

takže můžeme vybrat $286 - 214 = 72$ různých hrstí kuliček.

Úlohu lze řešit i jinou úvahou. Nejdříve spočítáme všechny hrsti, v nichž není modrá kulička. Mezi těmi určíme počet těch, ve kterých je právě i žlutých kuliček. Takových hrstí je možno vybrat $C(2, 10 - i)$. Hrstí, ve kterých není modrá kulička tedy je

$$\sum_{i=0}^3 C(2, 10 - i) = \sum_{i=0}^3 \binom{11-i}{1} = 11 + 10 + 9 + 8 = 38.$$

Analogicky odvodíme, že hrstí, ve kterých je modrá kulička, je celkem

$$\sum_{i=0}^3 C(2, 9 - i) = \sum_{i=0}^3 \binom{10-i}{1} = 10 + 9 + 8 + 7 = 34.$$

Celkem je tedy možno z pytlíku nabrat $38 + 34 = 72$ různých hrstí kuliček.

Dvěma různými způsoby jsme dostali stejný výsledek. Úvaha s využitím principu inkluze a exkluze je pro danou úlohu komplikovanější; lze ji ale použít i v obecnější, méně přehledné, situaci. \square

Na princip inkluze a exkluze se lze podívat i z jiného úhlu. Uvažujme množinu M nějakých prvků, které mohou, ale nemusejí, mít některou z vlastností α , β , γ . Označme $m = |M|$ počet prvků množiny M ; m_α , resp. m_β , resp. m_γ počet prvků, které mají vlastnost α , resp. β , resp. γ ; $m_{\alpha\beta}$, resp. $m_{\alpha\gamma}$, resp. $m_{\beta\gamma}$ počet prvků, které mají současně vlastnosti α i β , resp. α i γ , resp. β i γ ; $m_{\alpha\beta\gamma}$ počet prvků, které mají všechny tři vlastnosti; $m_{\alpha'\beta'\gamma'}$ počet prvků, které nemají žádnou z vlastností α , β , γ . Označíme-li dále A , resp. B , resp. C množinu prvků z množiny M , které mají vlastnost α , resp. β , resp. γ , bude

$$\begin{aligned} m_\alpha &= |A|, & m_\beta &= |B|, & m_\gamma &= |C|, \\ m_{\alpha\beta} &= |A \cap B|, & m_{\alpha\gamma} &= |A \cap C|, & m_{\beta\gamma} &= |B \cap C|, \\ m_{\alpha\beta\gamma} &= |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Sjednocení množin $A \cup B \cup C$ je množinou těch prvků, které mají alespoň jednu z vlastností α , β , γ . Podle principu inkluze a exkluze (2.8) je

$$|A \cup B \cup C| = m_\alpha + m_\beta + m_\gamma - m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\gamma} - m_{\beta\gamma} + m_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.9)$$

Celkový počet prvků množiny M je součtem všech prvků, které mají alespoň jednu z vlastností α , β , γ a počtu prvků, které žádnou z těchto vlastností nemají, tj.

$$|M| = |A \cup B \cup C| + m_{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Odtud dostaneme

$$m_{\alpha'\beta'\gamma'} = |M| - |A \cup B \cup C|$$

a po dosazení (2.9)

$$m_{\alpha'\beta'\gamma'} = |M| - m_\alpha - m_\beta - m_\gamma + m_{\alpha\beta} + m_{\alpha\gamma} + m_{\beta\gamma} - m_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.10)$$

Příklad 11. Personalistka jisté firmy poskytla řediteli následující informaci: ve firmě pracuje 250 mužů a 200 žen, přitom 160 mužů a 140 žen má vysokoškolské vzdělání, do práce dojíždí 180 mužů a 100 žen, vysokoškolsky vzdělaných mužů dojíždí 150 a vysokoškolsky vzdělaných žen 20. Co z toho může ředitel usoudit?

Ve firmě podle údajů pracuje celkem $250+200=450$ lidí. Spočítáme, kolik z nich je žen bez vysokoškolského vzdělání, které do práce nedojíždějí. Označme vlastnosti osob:

- α ... mužské pohlaví,
- β ... vysokoškolské vzdělání,
- γ ... dojíždí do zaměstnání.

Použijeme označení zavedené před příkladem. Pak hledaný počet je $m_{\alpha'\beta'\gamma'}$. Podle podmínek uvedených v informaci je

$$\begin{aligned} m_\alpha &= 250, & m_{\alpha\beta} &= 160, \\ m_\beta &= 160 + 140 = 300, & m_{\alpha\gamma} &= 180, \\ m_\gamma &= 180 + 100 = 280, & m_{\beta\gamma} &= 150 + 20 = 170, \\ & & m_{\alpha\beta\gamma} &= 150. \end{aligned}$$

Podle principu inkluze a exkluze (2.10) je

$$m_{\alpha'\beta'\gamma'} = 450 - 250 - 300 - 280 + 160 + 180 + 170 - 150 = -20.$$

To samozřejmě není možné. Ředitel může usoudit, že personalistka si informace vymyslela. \square

Příklad 12. V počítačové učebně je třicet počítačů. Přitom dvacet běží pod operačním systémem Linux, osm má připojen plochý monitor a dvacet pět má nainstalovanou CD mechaniku; alespoň dva z uvedených atributů má dvacet počítačů, všechny tři má šest počítačů. Kolik počítačů

- a) má alespoň jednu z uvedených vlastností?
- b) má právě jednu z uvedených vlastností?
- c) nemá žádnou z uvedených vlastností?

Označme:

- L ... množina počítačů s operačním systémem Linux,
- P ... množina počítačů s plochým monitorem,
- C ... množina počítačů s CD mechanikou,
- p_j ... počet počítačů, které mají právě j z uvedených vlastností,
- a_1 ... počet počítačů, které mají alespoň jednu z uvedených vlastností.

Zřejmě je $a_1 = |L \cup P \cup C|$. Dále položíme

$$\begin{aligned} s_1 &= |L| + |P| + |C|, \\ s_2 &= |L \cap P| + |L \cap C| + |P \cap C|, \\ s_3 &= |L \cap P \cap C|. \end{aligned}$$

Podle zadání je

$$|L| = 20, \quad |P| = 8, \quad |C| = 25,$$

takže

$$s_1 = 20 + 8 + 25 = 53$$

a dále

$$s_3 = p_3 = 6.$$

Počet počítačů, které mají právě dvě vlastnosti, je roven počtu počítačů, které mají alespoň dvě vlastnosti zmenšenému o počet počítačů, které mají právě tři vlastnosti, tj.

$$p_2 = 20 - 6 = 14.$$

V součtu s_2 je zahrnut počet p_2 a třikrát počet p_3 (viz obr. 2.2 b), v němž nahradíme množinu A množinou L a množinu B množinou P), tj.

$$s_2 = p_2 + 3p_3 = 14 + 3 \cdot 6 = 32.$$

a) Podle principu inkluze a exkluze (2.8), v němž píšeme L místo A a P místo L , platí

$$a_1 = s_1 - s_2 + s_3 = 53 - 32 + 6 = 27.$$

b) Zřejmě je $a_1 = p_1 + p_2 + p_3$, takže

$$p_1 = a_1 - p_2 - p_3 = 27 - 14 - 6 = 7.$$

c) Podle vztahu (2.10), v němž $|M| = 30$, je počet počítačů, které nemají žádnou z uvedených vlastností, roven

$$30 - s_1 + s_2 - s_3 = 30 - 53 + 32 - 6 = 3.$$

Na otázku bylo možné také odpovědět prostou úvahou: všech počítačů je 30, z nich 27 má podle části a) alespoň jednu z uvedených vlastností, takže žádnou z nich nemají $30 - 27 = 3$ počítače. \square

2.3.2 Obecný počet množin

Pokud uvažované množiny místo symbolů A, B, C označíme symboly A_1, A_2, A_3 , lze princip inkluze a exkluze pro tři množiny (2.8) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \\ &= \sum_{i=1}^3 |A_i| - \sum_{i=1}^{3-1} \sum_{j=i+1}^3 |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{3-2} \sum_{j=i+1}^{3-1} \sum_{l=j+1}^3 |A_i \cap A_j \cap A_l| = \\ &= \sum_{i=1}^3 |A_i| - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Tento zápis napovídá, jak by bylo možné výsledek zobecnit pro libovolné k :

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| &= \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=i_1+1}^k |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{k-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{k-1} \sum_{i_3=i_2+1}^k |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + \\
&\dots + (-1)^k \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \dots \sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+1}^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}| + \\
&\quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \\
&= \sum_{j=1}^k \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| \right). \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Vzorec jsme odvodili neúplnou indukcí: ze vzorců platných pro $k = 2$ a $k = 3$ jsme uhodli tvar vzorce pro obecné k . Že toto hádání nebylo úplně špatně, můžeme ověřit tím, že se podíváme, zda vzorec platí i pro nějaké další přirozené číslo k různé od 2 a 3. Tak také ukážeme použití vzorce (2.11).

Příklad 13. Čtyři slova

BALET, BARON, HOLUB, POLKA

mají tyto zajímavé vlastnosti: Každé slovo je tvořeno pěti různými písmeny. Každá dvě slova mají společná právě dvě písmena:

BALET, BARON — AB	BARON, HOLUB — BO
BALET, HOLUB — BL	BARON, POLKA — AO
BALET, POLKA — AL	HOLUB, POLKA — LO

a každá tři slova mají společné jedno písmeno:

BALET, BARON, HOLUB — B	BALET, HOLUB, POLKA — L
BALET, BARON, POLKA — A	BARON, HOLUB, POLKA — O.

Žádné písmeno se nevyskytuje ve všech čtyřech slovech. Kolik různých písmen je v těchto slovech?

Na otázku lze snadno odpovědět spočítáním písmen, je jich 12. Odpověď však lze také hledat pomocí vzorce (2.11). Uvedená slova budeme považovat za čtyři pětiprvkové množiny písmen. Je celkem $c(4, 2)$ dvojic slov, které mají dvouprvkové průniky, $c(4, 3)$ trojic slov s jednoprvkovými průniky a jedna čtveřice s prázdným průnikem. Celkový počet písmen je tedy podle (2.11) roven

$$4 \cdot 5 - \binom{4}{2} \cdot 2 + \binom{4}{3} \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 12.$$

□

Tento příklad lze považovat za konkrétní ilustraci toho, že vzorec (2.11) „funguje“ i pro jiné k , než pro které byl odvozen, přinejmenším pro $k = 4$. Tím ale ještě není zaručeno, že vzorec platí pro libovolné přirozené číslo k , to je třeba dokázat.

Vzorec (2.11) vypadá na první pohled složitě, ale jeho důkaz je jednoduchý. Zvolme libovolný prvek $a \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$. Nechtě $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}$ jsou právě všechny množiny, do nichž prvek a patří. Rozmysleme si, v kterých množinách typu

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_r} \quad (2.12)$$

je prvek a obsažen. Je to právě v těch, pro něž je

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subseteq \{i_1, i_2, \dots, i_s\}.$$

Počet r -prvkových podmnožin s -prvkové množiny je podle 2.1.3 $\binom{s}{r}$, pokud $s \geq r$, a 0, pokud $s < r$. Počet prvků množiny typu (2.12) připočítáváme ve vzorci (2.11) vynásobený číslem $(-1)^{r+1}$, tedy přičítáme, pokud r je liché a odečítáme, pokud r je sudé. Celkový příspěvek prvku a k pravé straně vzorce (2.11) tedy činí

$$\begin{aligned} & \binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \dots + (-1)^{s+1} \binom{s}{s} = \\ & = \binom{s}{0} - \left[\binom{s}{0} - \binom{s}{1} + \binom{s}{2} - \dots + (-1)^s \binom{s}{s} \right] = 1 - (1-1)^s = 1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

podle binomické věty. Každý prvek ze sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ je tedy na pravé straně vzorce (2.11) započítán právě jednou. Tím je důkaz proveden.

Vzorec (2.11) lze díky výpočtu (2.13) vyjádřit slovně. V součtu $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$ jsou započítány právě ty prvky, které leží v jediné z množin A_1, A_2, \dots, A_k ; všechny ostatní prvky jsou tam započteny vícekrát. Odečteme-li $\sum |A_i \cap A_j|$, budou uvedeny na pravou míru i počty prvků ležících právě ve dvou množinách, přičemž počty prvků ležících ve více množinách byly zredukovány příliš. To se u prvků ležících právě ve třech množinách napraví přičtením $\sum |A_i \cap A_j \cap A_l|$ atd. Z této úvahy je opět patrné, proč se vzorec (2.11) nazývá princip inkluze a exkluze.

Uvedeme ještě analogii vzorce (2.10) pro případ k vlastností. Buď M množina, jejíž prvky mohou mít některou ze vzájemně se nevylučujících vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Budte dále $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ a $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ disjunktí podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, k\}$. Označme

$$m_{\alpha_{v_1} \alpha_{v_2} \dots \alpha_{v_p} \alpha'_{w_1} \alpha'_{w_2} \dots \alpha'_{w_n}}$$

počet právě těch prvků množiny M , které mají každou z vlastností $\alpha_{v_1}, \alpha_{v_2}, \dots, \alpha_{v_p}$ a nemají žádnou z vlastností $\alpha_{w_1}, \alpha_{w_2}, \dots, \alpha_{w_n}$. Pak platí

$$\begin{aligned} m_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_k} &= |M| - \sum_{i=1}^k m_{\alpha_i} + \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=i_1+1}^k m_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2}} + \dots + (-1)^k m_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \\ &= |M| + \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} m_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j}}. \end{aligned}$$

Příklad 14. V salesiánském středisku volného času jsou čtyři zájmové kroužky — malířský (M), hudební (H), taneční (T) a počítačových her (P). Některé z dětí navštěvujících středisko tráví čas ve více kroužcích. Přehled o návštěvnosti podává tabulka 2.1 (např. MT znamená počet všech dětí, které navštěvují současně malířský a taneční kroužek bez ohledu na to, navštěvují-li případně i některý další). Kolik dětí navštěvuje středisko?

M	... 26	MT ... 3	MHT	... 2
H	... 58	MP ... 7	MHP	... 5
T	... 19	HT ... 5	MTP	... 0
P	... 17	HP ... 9	HTP	... 0
MH	... 18	TP ... 0	$MHTP$... 0

Tab. 2.1: K příkladu 14 o zájmových kroužcích

Podle vzorce (2.11) to je

$$(26 + 58 + 19 + 17) - (18 + 3 + 7 + 5 + 9 + 0) + (2 + 5 + 0 + 0) - 0 = 85$$

dětí. □

Příklad 15. Úlohu z příkladu 8 vyřešíme pomocí principu inkluze a exkluze.

Opět označíme hledaný počet permutací symbolem d_n . Pro každý index i z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ označme A_i množinu všech permutací prvků a_1, a_2, \dots, a_n takových, že na i -tém místě je prvek a_i . Žádná permutace z žádné množiny A_i nevyhovuje podmínkám úlohy.⁴ Počet permutací vyhovujících podmínkám úlohy tedy bude roven počtu všech permutací n prvků zmenšenému o počet permutací ve všech množinách A_i , tj

$$d_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Pro každou neprázdnou podmnožinu $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ je průnik

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r} \tag{2.14}$$

množinou těch permutací, které mají na i_1 -té pozici prvek a_{i_1} , na i_2 -té pozici prvek a_{i_2} , atd. Takových permutací je zřejmě $(n - r)!$; můžeme si totiž představit, že máme umístěno r prvků a permutujeme zbývajících $n - r$ prvků. Průniků typu (2.14) je zřejmě tolik, kolik je r -prvkových podmnožin n -prvkové množiny,

⁴Ve větě je příliš mnoho záporů. To česká gramatika nezakazuje, ale nadužívání této možnosti ztěžuje jednoznačnou interpretaci výroků. Přesnější formulace by byla: „Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že pro každou permutaci $P \in A_i$ neplatí podmínka úlohy.“ Jednoznačný je formální zápis „ $(\forall i)(\forall P)((i \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge P \in A_i) \Rightarrow \neg V(P))$ “, kde V je unární predikát interpretovaný jako podmínka ze zadání úlohy.

tj. $c(n, r) = \binom{n}{r}$. Podle principu inkluze a exkluze (2.11) máme

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \binom{n}{r} (n-r)! = \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{n!}{r!(n-r)!} (n-r)! = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{n!}{r!} = n! \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} \end{aligned}$$

a tedy

$$d_n = n! - n! \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \quad (2.15)$$

Podářilo se nám vyjádřit říslo d_n římocí počtu prvku n . Při velkém n není tedy nutno počítat všechna d_3, d_4, \dots, d_{n-1} jako v příkladu 8. \square

Mějme opět konečné množiny A_1, A_2, \dots, A_k , jejich sjednocení A a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ označme
 a_j ... počet prvku množiny A ležících v alespoň j z množin A_1, A_2, \dots, A_k ,
 p_j ... počet prvku množiny A ležících právě v j z množin A_1, A_2, \dots, A_k
a polořme

$$s_j = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_j \leq k} |A_{r_1} \cap A_{r_2} \cap \dots \cap A_{r_j}|.$$

Zavedli jsme tedy řísouř souřstavy řísel

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_k, \\ p_1, p_2, \dots, p_k, \\ s_1, s_2, \dots, s_k \end{aligned}$$

a budeme se snažit řísla z jedné souřstavy vyjádřit pomocí řísel jiné souřstavy.

Vyjádřeni řísla a_1 pomocí řísel z třetí souřstavy již známe, je to princip inkluze a exkluze (2.11), neboť a_1 je počet prvku ležících alespoň v jedné z množin A_1, A_2, \dots, A_k , tedy počet prvku jejich sjednocení,

$$a_1 = s_1 - s_2 + s_3 - \dots + (-1)^{k+1} s_k.$$

Vřahy mezi prvniřmi dvěřma souřstavami řísel plynou římocí z jejich zavedení. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ platí

$$a_j = p_j + p_{j+1} + \dots + p_k = \sum_{i=j}^k p_i \quad (2.16)$$

a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ platí

$$p_j = a_j - a_{j+1}. \quad (2.17)$$

Pro $j = k$ se rovnost (2.16) redukuje na $a_k = p_k$, což lze chápat i jako vyjádření p_k pomocí čísel z první soustavy.

Vyjádříme čísla s_1, s_2, \dots, s_k pomocí čísel p_1, p_2, \dots, p_k . Vezměme libovolný prvek a množiny A . Nechtě $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_q}$ jsou právě ty z množin A_1, A_2, \dots, A_k , v nichž prvek a leží (v ostatních tedy neleží). Buď $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ a spočítejme, v kolika množinách typu

$$A_{r_1} \cap A_{r_2} \cap \dots \cap A_{r_j}$$

prvek a leží. On samozřejmě leží v průniku těch množin, kterých je prvkem; leží tedy v těch množinách uvedeného typu, pro něž platí

$$\emptyset \neq \{r_1, r_2, \dots, r_j\} \subseteq \{i_1, i_2, \dots, i_q\}.$$

Podle 2.1.3 je počet j -prvkových podmnožin q prvkové množiny roven $\binom{q}{j}$ pokud $q \geq j$, a roven 0, pokud $q < j$. Vidíme tedy, že každý prvek ležící právě v q množinách z množin A_1, A_2, \dots, A_k je v součtu s_j započten právě $\binom{q}{j}$ -krát pro každé $q \in \{j, j+1, \dots, k\}$ a není započten vůbec pro $q < j$. Platí tedy

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \dots + \binom{k}{j} p_k = \sum_{i=1}^k \binom{i}{j} p_i \quad (2.18)$$

pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Abychom vyjádřili čísla p_1, p_2, \dots, p_k pomocí čísel s_1, s_2, \dots, s_k , budeme se na právě odvozené vztahy dívat jako na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_k &= s_k \\ p_{k-1} + \binom{k}{k-1} p_k &= s_{k-1} \\ p_{k-2} + \binom{k-1}{k-2} p_{k-1} + \binom{k}{k-2} p_k &= s_{k-2} \\ &\vdots \\ p_2 + \binom{3}{2} p_3 + \dots + \binom{k-1}{2} p_{k-1} + \binom{k}{2} p_k &= s_2 \\ p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \binom{3}{1} p_3 + \dots + \binom{k-1}{1} p_{k-1} + \binom{k}{1} p_k &= s_1. \end{aligned}$$

Z první z nich máme

$$p_k = s_k,$$

ze druhé

$$p_{k-1} = s_{k-1} - \binom{k}{k-1} p_k = s_{k-1} - \binom{k}{k-1} s_k,$$

ze třetí

$$\begin{aligned}
p_{k-2} &= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} p_{k-1} - \binom{k}{k-2} p_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} \left[s_{k-1} - \binom{k}{k-1} s_k \right] - \binom{k}{k-2} s_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \left(\frac{(k-1)! k!}{(k-2)! 1! (k-1)! 1!} - \frac{k!}{(k-2)! 2!} \right) s_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \frac{(k-1)! k! - k! (k-1)(k-2) \cdots 4 \cdot 3}{(k-2)! (k-1)!} s_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \frac{(k-1)! k! (1 - \frac{1}{2})}{(k-2)! (k-1)!} s_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \frac{k!}{(k-2)! 2} s_k = \\
&= s_{k-2} - \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \binom{k}{k-2} s_k
\end{aligned}$$

atd. Postupně tak dostaneme

$$\begin{aligned}
p_j &= s_j - \binom{j+1}{j} s_{j+1} + \binom{j+2}{j} s_{j+2} + \cdots + (-1)^{k-j} \binom{k}{j} s_k = \\
&= \sum_{i=j}^k (-1)^{i-j} \binom{i}{j} s_i. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Vzorec (2.19) jsme vlastně uhodli ze vzorců pro $j = k, k-1, k-2$. Jeho platnost je však třeba dokázat. To provedeme v ...

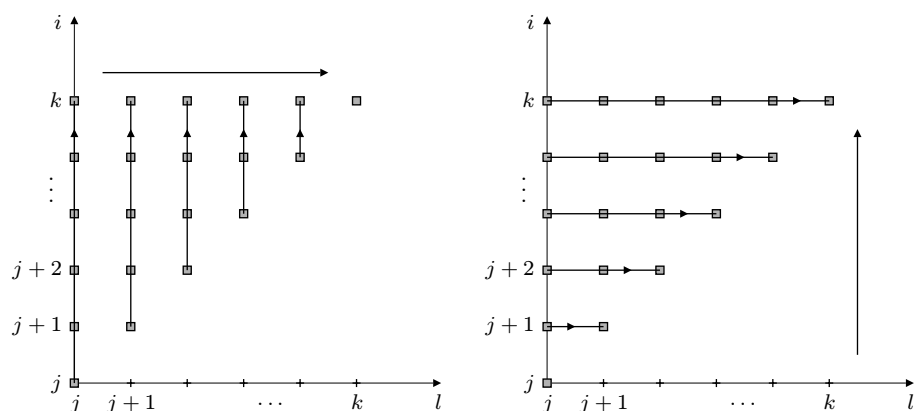
Ještě vyjádříme čísla a_1, a_2, \dots, a_k pomocí čísel s_1, s_2, \dots, s_k . Podle (2.16) a (2.19) je

$$\begin{aligned}
a_j &= \sum_{l=j}^k p_l = \sum_{l=j}^k \left[\sum_{i=l}^k (-1)^{i-l} \binom{i}{l} s_i \right] = \sum_{i=j}^k \left[\sum_{l=j}^i (-1)^{i+l} \binom{i}{l} s_i \right] = \\
&= \sum_{i=j}^k (-1)^i s_i \sum_{l=j}^i (-1)^l \binom{i}{l}; \quad (2.20)
\end{aligned}$$

při výpočtu jsme obrátili pořadí sčítání, jak je znázorněno na obrázku 2.3 a využili skutečnosti, že $(-1)^{i-l} = (-1)^{i+l}$.

Příklad 16. Kolik dětí z příkladu 14 navštívuje

- právě dva kroužky,
- alespoň dva kroužky?



Obr. 2.3: Obrácení pořadí sčítání ve výpočtu (2.20)

V tomto případě je $k = 4$ a podle tabulky 2.1 je

$$\begin{aligned} s_1 &= 26 + 58 + 19 + 17 = 130, \\ s_2 &= 18 + 3 + 7 + 5 + 9 + 0 = 42, \\ s_3 &= 2 + 5 + 0 + 0 = 7, \\ s_4 &= 0. \end{aligned}$$

První otázkou se ptáme na číslo p_2 , druhou na číslo a_2 . Podle (2.19) a (2.20) dostaneme

$$\begin{aligned} p_2 &= s_2 - \binom{3}{2} s_3 + \binom{3}{2} s_4 = 42 - 3 \cdot 7 + 6 \cdot 0 = 21, \\ a_2 &= s_2 (-1)^2 \binom{2}{2} - s_3 \left[(-1)^2 \binom{3}{2} + (-1)^3 \binom{3}{3} \right] + \\ &\quad + s_4 \left[(-1)^2 \binom{4}{2} + (-1)^3 \binom{4}{3} + (-1)^4 \binom{4}{4} \right] = \\ &= 42 \cdot 1 + 7 \cdot (3 - 1) + 0 = 28. \end{aligned}$$

□

2.4 Aplikace

2.4.1 Počty diploidních genotypů a fenotypů

Vyjdeme z abstraktního modelu dědičnosti, podle něhož je genetická informace umístěna v *lokusu*⁵, který si lze u *diploidních* organismů představit jako krabičku

⁵Tato barbarská deklinace se v genetické literatuře skutečně používá.

obsahující dva *geny* — nosiče jedné genetické informace. (Tato věta zavádí tři pojmy, které nejsou přesně definovány; pouze jsou uvedeny v souvislosti, v nichž bývají používány.) Každý gen může existovat v jedné nebo více formách, podobách, kterým se říká *alely*. V tomto pojetí je gen abstraktní obecný pojem, alela je jeho konkrétní realizace. Realizují-li se oba geny v jednom lokusu stejně, tj. v onom lokusu se nachází dva exempláře téže alely, nazýváme je *homozygotním* párem, v opačném případě *heterozygotním*. Souhrn všech genů živého organismu se nazývá *genotyp*. (Přesněji by se asi mělo mluvit o souhrnu všech alel, tedy o *alelotypu*, neboť záleží i na formách jednotlivých genů, ale takový pojem se nepoužívá.) Projevem genů jsou nějaké pozorovatelné *znaky* organismu a souhrn všech znaků se nazývá *fenotyp*. Někdy však sledujeme jen jeden nebo několik znaků a tedy jeden nebo několik genů (lokusů), které tento znak určují. V takovém případě se genotypem rozumí genetické vyjádření tohoto znaku (těchto znaků), tedy soubor alel, které sledovaný znak (znaky) ovlivňují, a fenotypem se rozumí tento znak (znaky). Význam slov genotyp a fenotyp je tedy určen kontextem, v němž jsou použita.

Která alela z heterozygotního páru se projeví ve fenotypu, záleží na jejich vztahu. Označme pro určitost alely z lokusu A symboly a_1 a a_2 . Řekneme, že alela a_1 *dominuje* nad alelou a_2 , pokud se ve fenotypu projeví pouze alela a_1 . Tedy fenotyp (chápaný jako jeden znak) heterozygotního genotypu a_1a_2 (tj. heterozygotního páru alel v lokusu A) je stejný, jako fenotyp homozygotního genotypu a_1a_1 a jiný než fenotyp homozygotního genotypu a_2a_2 . Pokud alela a_1 nedominuje nad alelou a_2 ani a_2 nedominuje nad a_1 , ve fenotypu se projeví alely obě — buď jedna více a druhá méně (neúplná dominance) nebo nezávisle na sobě (kodominance) — a různým genotypům odpovídají různé fenotypy.

Uvažujme nyní tři lokusy (nebo tři geny) A, B, C s alelami a_1, a_2, a_3 v lokusu A , alelami b_1, b_2 v lokusu B a alelami c_1, c_2 v lokusu C . Přitom alela a_1 dominuje nad a_2 i nad a_3 a alela a_2 dominuje nad a_3 , alely genu B a genu C jsou kodominantní. Ptáme se, kolik existuje různých genotypů a fenotypů.

V lokusu A jsou dvě ze tří alel a_1, a_2, a_3 a každá z nich se může vyskytovat dvakrát. To lze chápat jako výběr dvou prvků ze souboru prvků tří druhů. Takových výběrů je podle 2.1.6

$$C(3, 2) = \binom{2+3-1}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2}.$$

analogickou úvahou lze odvodit, že možných souborů alel v lokusu B i v lokusu C je

$$C(2, 2) = \binom{3}{2}.$$

Libovolný výběr alel v lokusu A lze spojit s libovolným výběrem alel v lokusu B a dále s libovolným výběrem alel v lokusu C , takže celkový počet výběrů alel, tj. genotypů, je

$$C(3, 2) \cdot C(2, 2) \cdot C(2, 2) = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 54.$$

U alel v lokusech B a C se neprojevuje dominance, počty fenotypů budou stejné jako počty genotypů. U alel v lokusu A se dominance projevuje v každé z možných dvojic alel, počet fenotypů tedy bude stejný jako počet alel, tj. 3. Celkem dostaneme, že počet fenotypů je

$$3 \cdot C(2, 2) \cdot C(2, 2) = 3 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 27.$$

Obecně lze říci, že pokud má jeden gen k alel, pak je $C(2, k)$ možných obsazení příslušného lokusu, tedy genotypů. Počty fenotypů podstatně závisí na dominanci mezi alelami. Kdybychom v uvažovaném příkladu vynechali požadavek, že alela a_2 dominuje nad a_3 , fenotypy genu A by byly čtyři: v lokusu se vyskytuje alela a_1 , homozygotní páry a_2a_2 a a_3a_3 a heterozygotní pár a_2a_3 .

2.4.2 Počet prokaryotických (bakteriálních) chromozomů

Chromozom prokaryotické buňky (nukleoid) je tvořen jedinou velkou kruhovou molekulou DNA, která je v jednom místě připojena k cytoplazmatické membráně. Za lokus považujeme jednotlivé části chromozomu a za geny úseky DNA. Prokaryota jsou totiž *haploidní* organismy, v jednom lokusu je jeden gen. Můžeme se ptát, kolik je logicky možných prokaryotických chromozomů tvořených n geny.

Přestože je ve skutečné buňce chromozom mnohonásobně složitě stočen (má totiž délku téměř milimetr a velikost prokaryotické buňky je jen několik mikrometrů), představíme si ho jako kružnici. Kdybychom chtěli chromozom vytvářet, vezmeme jeden gen — ten můžeme vybrat z n možností a dále vybereme jeden jeho konec, na který budeme připojovat geny další. Výběr začátku tedy můžeme uskutečnit $2n$ způsoby. Pak vybereme ze zbývajících $n - 1$ genů jeden a připojíme ho jedním ze dvou konců ke genu prvním; výběr a připojení druhého genu tedy můžeme učinit $2(n - 1)$ způsoby. Pokračujeme v připojování genů do řady. Výběr a připojení druhého můžeme provést $2(n - 2)$ způsoby, třetího $2(n - 3)$ způsoby atd. až výběr a připojení posledního $2 \cdot 1$ způsoby. Pak poslední gen připojíme k prvním a tím chromozom uzavřeme. Tímto způsobem ale dostaneme každý z chromozomů dvakrát — spojením nějaké řady genů a řady, která je jejím „zrcadlovým obrazem“ dostaneme tentýž chromozom; např. by to byly kruhové chromozomy vytvořené z následujících řad pěti genů a jejich orientací:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{E}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}.$$

Po spojení řady genů do kruhového chromozomu nezáleží na tom, který z n genů byl počáteční; libovolný z nich lze za takový považovat, takže z n různých řad dostaneme tentýž chromozom. Např. z následujících pěti řad pěti orientovaných genů dostaneme stejné kruhové chromozomy:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}}, & \quad \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}}, & \quad \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}, \\ \underline{\underline{D}} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}}, & \quad \underline{\underline{E}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}}. \end{aligned}$$

Různých kruhových chromozomů tedy bude $2n$ -krát méně než všech řad vytvořených popsáním způsobem. Označíme-li tedy hledaný počet symbolem N_n , máme

$$N_n = \frac{[2 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot [2 \cdot (n-2)] \cdot [2 \cdot (n-3)] \cdots [2 \cdot 2] \cdot [2 \cdot 1]}{2 \cdot n} = 2^{n-1}(n-1)!$$

Skutečný prokaryotický chromozom obsahuje asi 4 000 genů. Logicky možných chromozomů tedy je asi

$$N_{4000} = 2^{3999} \cdot 3999! = 3,013\,417\,773 \cdot 10^{13873}.$$

Z tohoto výsledku je jasné, že se realizuje jen nepatrný zlomek logických možností.