Domácí úkol č. 6

1. Vypočítejte determinant následujících matic:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

   $A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -16 + 24 = 8$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   $B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 5 + 12 - 30 + 4 - 12 = -45$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & -9 & -17 & -17 \end{vmatrix} = = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & -18 & -34 & -34 \end{vmatrix}$

   $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & 9 \\ -18 & -34 & -34 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2 \cdot 9 \cdot (-34) + 2 \cdot 9 \cdot 18 - 9 \cdot 18 + 2 \cdot 9 \cdot 34) = 81$

   (d) $D = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

   $D = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = (-3)10 + 5 \cdot 12 + 4 \cdot 18 - 7 \cdot 12 = 18$

   (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-6+8+9-6-12+6) - 5 \cdot (-6+8+9-6+6-12) =$$

$$(-1) \cdot 7 - 5 \cdot (-1) = -7 + 5 = -2$$

2. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte neznámou x_2 z následující soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 5 + 8 + 4 + 10 - 6 = 27$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & 29 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 174 + 10 - 80 + 116 - 100 - 12 = 108$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{108}{27} = 4$$

3. Najděte adjungované matice k maticím:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^* = \begin{pmatrix} 18+8 & -(-12-16) & -4+12 \\ -(6+4) & 18-8 & -(6+4) \\ -4+6 & -(-12-4) & 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 28 & 8 \\ -10 & 10 & -10 \\ 2 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

4. Vyřešte soustavu lineárních rovnic v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4x_1+3x_2-2x_3 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 + rx_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & r & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & r+1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5r-3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$r = -\frac{3}{5} \Rightarrow [x_1, x_2, x_3] = [3 + \frac{t}{5}, \frac{2}{5}t, t]$
$r \neq -\frac{3}{5} \Rightarrow [x_1, x_2, x_3] = [3, 0, 0]$

5. Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic (4 rovnice pro 4 neznámé) má po Gaussově eliminaci následující tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4r(r-1) & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3r(r-1) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2r(r-1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & r(r-1) & r(r-2) \end{array}\right)$$

Proveďte diskuzi řešení vzhledem k parametru $r \in \mathbb{R}$.

(a) $r = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow [x_1, x_2, x_3, x_4] = [0, -1, 1, t]$

(b) $r = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ nemá řešení

(c) $r \neq 0, r \neq 1 \Rightarrow [x_1, x_2, x_3, x_4] = [24r - 8, r^2 - 2r + 3, -2r^2 - 4r + 1, \frac{r-2}{r-1}]$