Domácí úkol č. 8

1. Určete jádro, obraz, řádkový prostor matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
   Ker$(A) = \{(-t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$ =Span$\left\langle(-1, -1, 1)^T\right\rangle$
   Im$(A) =$ Span$\left\langle(1, 3, 01, 2)^T, (4, -2, 0, 3)^T\right\rangle$
   R$(A) =$ Span$\left\langle(1, 4, 5)^T, (0, -1, -1)^T\right\rangle$

2. Určete jádro a obraz matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
   Ker$(A) = \{(0, -\frac{3}{2}t, t)^T, t \in \mathbb{R}\}$ =Span$\left\langle(0, -3, 2)\right\rangle$
   Im$(A) =$ Span$\left\langle(1, 2)^T, (2, 0)^T\right\rangle$

3. Určete bázi vektorového podprostoru $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ v Mat$_{2x2}(\mathbb{R})$

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Tvoří vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázi $\mathbb{R}^3$?

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ vektory jsou LN, $dim\mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ tvoří bázi

5. Určete souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = [w]_e$ v bázi

   $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 2\\1 & 2 & 3 & | & 3\\1 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 2\\0 & 1 & 2 & | & 1\\0 & -1 & 0 & | & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 2\\0 & 1 & 2 & | & 1\\0 & 0 & 2 & | & -2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$c = -1, b = 3, a = 0$, tedy $[w]_\alpha = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$

6. Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly - sčítání vektorů je sčítání komplexních čísel. Ukažte, že čísla $1+i, 1-i$ tvoří bázi tohoto prostoru a napište součadnice čísla $5-2i$ v této bázi.
   $\begin{pmatrix}1 & 1 & | & 5\\1 & -1 & | & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & | & 5\\0 & -2 & | & -7\end{pmatrix} \Rightarrow$ jsou LN a platí $b = \frac{7}{2}, a = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$
   $[5-2i] = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

7. Doplňte množinu M tak, aby byla bází prostoru V:

   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^4$

   $$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

   $\alpha = \{(-1,1,0,0)^T, (0,-1,1,0)^T, (0,0,-1,1)^T, (1,0,0,0)^T\}$

   (b) $M = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix} \right\}, V=\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R})$

   $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   $$\sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \right\}$$

8. Zjistěte, zda jsou vektory lineárně nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište jeden jako lineární kombinaci ostatních. (Návod: napište si rovnici, podle které určujete LN nebo LZ vektory a pokud jsou LZ, vyjádřete vektor z této rovnice)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LZ}$$

vyjádření vektoru u_4: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_4 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$

9. Rozhodněte, zda se jedná o vektorový

   (a) prostor: $V = \mathbb{R}^3$, sčítání: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, násobení: $k \cdot (x_1, x_2, x_3) = (kx_1, x_2, x_3)$
   je vektorový prostor

   (b) podprostor: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$
   není, protože $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), y = x^2, v = u^2, y + v = x^2 + u^2 \neq (x + u)^2$

   (c) podprostor: $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\}$
   není, protože $(x, y, z)+(u, v, w) = (x+u, y+v, z+w), 2(x+u)-(y+v)+3(z+w) = 2 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 2u - v + 3w = 2 \wedge 2x - y + 3z = 2 \wedge 2u - v + 3w = 2 \Leftrightarrow 4 \neq 2$

   (d) podprostor: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y + 1\}$
   není, protože $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), x = y + 1, u = v + 1, x + u = y + v + 2 \notin M$

   (e) podprostor: $M = \{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3\}$
   není, součet neleží v množině M

10. Ze zadaných vektorů vyberte bázi $\text{Span}\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\rangle$ a zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinace vektorů vámi vybrané báze.
    $u_1 = (1, 3, -2, -1, 2)^T$
    $u_2 = (2, -1, 3, -2, -3)^T$
    $u_3 = (3, 2, 1, -3, -1)^T$
    $u_4 = (2, -38, 4, -1, -4)^T$
    $u_5 = (3, 5, -4, -1, 4)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -38 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -47 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -47 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -47 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2; \text{ bázi tvoří vektory } u_1, u_2, u_4, u_5$$